ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧЕРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Методические указания к практическим занятиям и самостоятельной работе студентов

Утверждены редакционно-издательским советом университета 19 января 2005 г.

Самара 2005

Составители: Кшнякина Н.В., Хлебникова М.Ю.

УДК 517.3(07)

Неопределенный интеграл: Методические указания / Сост.: Кшнякина Н.В., Хлебникова М.Ю.; Самарск. гос. арх. -строит. ун-т, Самара, 2005.

Данные методические указания являются разработкой практических занятий по теме «Неопределенный интеграл». Методические указания предназначены для студентов I курса специальностей 290300(«Промышленное и гражданское строительство»), 290500(«Городское строительство и хозяйство»), 291000(«Автомобильные дороги и аэродромы»),290400 («Гидротехническое строительство»), 290700 («Теплогазоснабжение и вентиляция»), 290800 («Водоснабжение и водоотведение»), 330200 («Инженерная защита окружающей среды»), 290600 («Производство строительных материалов, изделий и конструкций»), 291300 («Механизация и автоматизация строительства») и составлены в соответствии с рабочим планом кафедры высшей математики.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, если для всех $x \in X$ выполняется равенство: $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

Доказано, что если функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке, то всякая другая первообразная для $f(x)$ отличается от $F(x)$ на постоянное слагаемое, т.е. может быть представлена в виде $F(x) + c$, где c – постоянная, причем выражение $F(x)+ c$ охватывает совокупность всех первообразных для данной функции.

Определение 2. Если $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$, то выражение $F(x) + c$, где c – произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$. Следовательно, по определению:

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \text{ где } F'(x) = f(x).$$

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, а символ $\int$ – знаком неопределенного интеграла.

График первообразной $y = F(x)$ называют интегральной кривой. Поэтому неопределенному интегралу соответствует совокупность интегральных кривых, полученных параллельным переносом одной из них вдоль оси Oy (рис.1).

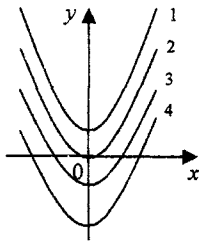

Рис.1

Например, если $f(x) = 2x$, то первообразной для нее является $F(x) = x^2 + c$, т.е. $\int 2xdx = x^2 + c$.

Значит, неопределенному интегралу $\int 2xdx$ соответствует совокупность парабол $x^2 + c$:

1. $y = x^2 + 1$; 3. $y = x^2 - 1$;
2. $y = x^2$; 4. $y = x^2 - 2$.

Неопределенный интеграл обладает следующими свойствами:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$,

Благодаря этому свойству дифференцирование полученной совокупности первообразных позволяет убедиться в правильности интегрирования.

2. $\int f'(x)dx = \int d(f(x)) = f(x) + c$, например, $\int dx = x + c$.

3. $\int (a f(x) + bg(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$, где $a, b = const$.

4. Если $\int f(x)dx = F(x) + c$ и $u = \varphi(x)$ – любая дифференцируемая функция, то $\int f(u)\,du = F(u) + c$.

Это свойство инвариантности формул интегрирования. В частности:

4а. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$, причем $a \neq 0$.

4б. $\int f(x+b)dx = F(x+b) + c$, если $a = 1$.

4в. $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax)+c$, если $b=0$.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Приведенные здесь интегралы принято называть табличными. Во всех формулах на основании свойства 4 переменную u можно считать как независимой, так и любой дифференцируемой функцией.

1. $\int u^{\alpha}du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c, \alpha \neq -1.$
1а. $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u}+c.$
1b. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}+c.$
2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u|+c.$
3. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a}+c.$
3а. $\int e^u du = e^u + c.$
4. $\int \sin u du = -\cos u + c.$
5. $\int \cos u du = \sin u + c.$
6. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + c.$
7. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + c.$
8. $\int tgudu = -\ln|\cos u| + c.$
9. $\int ctgudu = \ln|\sin u| + c.$
10. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{u}{a}+c.$
11. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+c.$
12. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a}+c.$
13. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm A}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2 \pm A}\right|+c.$

ЗАНЯТИЕ 1

НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Для уяснения понятия первообразной решите задачу.

1.Показать, что функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются первообразными для функции $f(x)$. Найти $F_1(x) - F_2(x)$.

А) $F_1(x) = x^2 - x$, $F_2(x) = \frac{1}{4}(2x-1)^2$; $f(x) = 2x-1$, $x \in R$.

Б) $F_1(x) = \sin^2 x$, $F_2(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + 5$; $f(x) = \sin 2x$, $x \in R$.

Под непосредственным интегрированием понимают сведение данного интеграла $\int f(x)dx$ к одному из табличных (формулы (1)–(13)). Для этого используют свойства 1–4, тождественные преобразования подынтегрального выражения $f(x)dx$. Полезно отметить часто применяемые свойства дифференциалов:

1. $dx = d(x+b)$.
2. $dx = \frac{1}{a}d(ax)$, $a \neq 0$.
3. $dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$, $a \neq 0$.

Одним из основных приемов непосредственного интегрирования является <u>подведение функции под знак дифференциала:</u>

4. $f(x)dx = dF(x)$, $F'(x) = f(x)$,

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Имея $\int f(x)dx = F(x) + c$ и используя свойство 1(с.3) для обеих частей этого равенства

$$\left.\begin{array}{l} d(\int f(x)dx) = f(x)dx \\ d(F(x)+c) = f(x)dx \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)dx = dF(x),$$

можно сделать вывод, что и для нахождения неопределенного интеграла и для подведения под знак дифференциала используются табличные формулы (1)–(13).

Например:

$$\int xdx = \frac{x^2}{2}+c \Rightarrow [\text{свойство}(4)] \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}dx^2.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c \Rightarrow [\text{свойство}(4)] \Rightarrow \frac{dx}{\sin^2 x} = -dctgx.$$

Рассмотрим примеры внесения функции под знак дифференциала. При этом будем использовать свойства 1–4 дифференциалов.

$$\frac{dx}{x+7} = \frac{d(x+7)}{x+7} = d\ln(x+7);$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \frac{d(x-1)}{\sqrt{x-1}} = 2d\sqrt{x-1};$$

$$e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}d(3x) = \frac{1}{3}de^{3x};$$

$$\frac{dx}{1+4x^2} = \frac{dx}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{d(2x)}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2}darctg2x;$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-(3x)^2}} = \frac{1}{3}\frac{d(3x)}{\sqrt{1-(3x)^2}} = \frac{1}{3}d\arcsin 3x;$$

$$\cos\frac{1-4x}{3}dx = \cos\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{3}x\right)dx = -\frac{3}{4}\cos\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{3}x\right)d\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{3}x\right) = -\frac{3}{4}d\sin\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{3}x\right);$$

$$\frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \frac{de^x}{1+(e^x)^2} = darctge^x.$$

<u>Упражнение</u>.Внести под знак дифференциала:

$$(2x+1)dx;\quad \frac{dx}{\sqrt{x+2}};\quad \frac{dx}{(1-3x)^2};\quad \sin\frac{2x}{3}dx;\quad e^{2-5x}dx;\quad \frac{dx}{1+5x^2};\quad \frac{dx}{\cos^2 7x};\quad \frac{dx}{1-6x};\quad \frac{dx}{\sqrt{x}\sin^2(1-3\sqrt{x})}.$$

НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ СТЕПЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Примеры:

1.1. $\int\left(\sqrt[3]{x^2} - \frac{5}{x} - \frac{\pi}{x^3} + x\sqrt{2} - \ln 3\right)dx = [\text{свойство 3 (с.3)}] = \int x^{\frac{2}{3}}dx - 5\int\frac{dx}{x} - \pi\int x^{-3}dx +$

$$+\sqrt{2}\int x dx - \ln 3\int dx = [\text{формулы (1), (2) и свойство 2 (с.3)}] = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} - 5\ln|x| - \pi\frac{x^{-3+1}}{-3+1} +$$

$$+\sqrt{2}\frac{x^{1+1}}{1+1} - \ln 3\cdot x + c = \frac{3}{5}\cdot x^{\frac{5}{3}} - 5\ln|x| + \frac{\pi}{2x^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - x\ln 3 + c.$$

1.2. $\int (x+3)^2 dx = [dx = d(x+3)$ по свойству 1 (с.4)$] = \int (x+3)^2 d(x+3) =$

$= [$формула (1) при $u = x+3, \alpha = 2] = \frac{(x+3)^3}{3} + c.$

Проверка: $\left[\frac{(x+3)^3}{3} + c\right]' = \frac{1}{3}\cdot 3(x+3)^2 = (x+3)^2, c' = 0.$

1.3. $\int (2x-1)^5 dx = \left[dx = \frac{1}{2}d(2x-1)\right.$ по свойству 3 (с.4)$\left.\right] = \frac{1}{2}\int (2x-1)^5 d(2x-1) =$

$= [$формула (1) при $u = 2x-1, \alpha = 5] = \frac{1}{2}\frac{(2x-1)^6}{6} + c = \frac{1}{12}(2x-1)^6 + c;$

Проверка: $\left[\frac{1}{12}(2x-1)^6 + c\right]' = \frac{1}{12}\cdot 6(2x-1)^5\cdot(2x-1)' + c' = \frac{1}{2}(2x-1)^5\cdot 2 = (2x-1)^5.$

1.4. $\int \frac{dx}{2-7x} = \left[dx = -\frac{1}{7}d(2-7x)\right.$ по свойству 3 (с.4)$\left.\right] = -\frac{1}{7}\int\frac{d(2-7x)}{2-7x} = [$формула (2) при $u = 2-7x] =$

$= -\frac{1}{7}\ln|2-7x| + c.$

Проверка: $\left[-\frac{1}{7}\ln|2-7x| + c\right]' = -\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2-7x}(2-7x)' + c' = -\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2-7x}\cdot(-7) = \frac{1}{2-7x}.$

1.5. $\int\frac{x dx}{5x^2+3} = [x dx = \frac{1}{2}dx^2 = \frac{1}{10}d(5x^2+3)$ по свойству 3 (с.4)$] = \frac{1}{10}\int\frac{d(5x^2+3)}{5x^2+3} =$

$= [$формула (2) при $u = 5x^2+3] = \frac{1}{10}\ln(5x^2+3) + c.$

Проверка: $\left[\frac{1}{10}\ln(5x^2+3) + c\right]' = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{5x^2+3}\cdot(5x^2+3)' + c' =$

$= \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{5x^2+3}\cdot 10x = \frac{x}{5x^2+3}.$

1.6. $\int\frac{dx}{x(7\ln x+2)^2} = \left[\frac{dx}{x} = \frac{1}{7}d(7\ln x+2)\right.$ по свойствам 2, 3 (с.4)$\left.\right] = \frac{1}{7}\int\frac{d(7\ln x+2)}{(7\ln x+2)^2} =$

$= [$формула (1б) при $u = 7\ln x + 2] = \frac{1}{7}\cdot\left(-\frac{1}{7\ln x+2}\right) + c = -\frac{1}{7(7\ln x+2)} + c.$

Проверка: $\left[-\frac{1}{7(7\ln x+2)} + c\right]' = -\frac{1}{7}\cdot\left(-\frac{1}{(7\ln x+2)^2}\right)\cdot(7\ln x+2)' + c' = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{(7\ln x+2)^2}\cdot 7\frac{1}{x} =$

$= \frac{1}{x(7\ln x+2)^2}.$

<u>Замечание.</u> Непосредственное интегрирование степенных функций по формулам (1), (1*а*), (1*б*), (2) возможно только в тех случаях, если подынтегральное выражение удается представить в виде произведения степенной функции u^α; $\frac{1}{u}$; $\frac{1}{\sqrt{u}}$ или $\frac{1}{u}$ и дифференциала du ее основания.

Используя формулы (1), (1*а*), (1*б*), (2), найти интегралы:

2. $\int\frac{dx}{x-5}$.	5. $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx$.	8. $\int\cos x\sqrt{\sin x}dx$.	11. $\int\frac{3-4tgx}{\cos^2 x}dx$.
3. $\int\frac{dx}{(x+\sqrt{2})^3}$.	6. $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{9-4e^x}}$.	9. $\int\frac{dx}{x\ln x}$.	12. $\int tg2x dx$.
4. $\int\frac{x dx}{5-3x^2}$.	7. $\int\frac{e^{2x}dx}{8e^{2x}-9}$.	10. $\int\frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$.	13. $\int\frac{x dx}{x+3}$.

<u>На дом.</u>

Выполните задание № 1 с проверкой.

ЗАНЯТИЕ 2

НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

При непосредственном интегрировании степенных функций по формулам (1)–(2) мы создавали дифференциал основания степени $u = u(x)$, используя подведение под знак дифференциала, табличные формулы (1)–(13), свойства 1–4 (с. 4) дифференциала, свойства 1–4 (с. 3,4) неопределенного интеграла.

Для использования других формул (3)–(13) нужно следить, чтобы под знаком дифференциала была промежуточная функция $u = u(x)$.

1. <u>Интегрирование показательной функции по формулам (3) и (3*а*)</u>

Для использования формул (3) и (3*а*) подынтегральное выражение $f(x)dx$ должно содержать показательную функцию a^u или e^u и дифференциал du ее показателя u.

Примеры:

2.1. $\int x\cdot 3^{5x^2+1}dx = \left[x dx = \frac{1}{2}dx^2 = \frac{1}{10}d(5x^2+1)\right] = \frac{1}{10}\int 3^{5x^2+1}d(5x^2+1) = [$формула (3) при $u = 5x^2+1] =$

$= \frac{1}{10}\cdot\frac{3^{5x^2+1}}{\ln 3} + c = \frac{1}{10\ln 3}\cdot 3^{5x^2+1} + c.$

Проверка:

$$\left[\frac{1}{10\ln 3}3^{5x^2+1} + c\right]' = \frac{1}{10\ln 3}3^{5x^2+1}\ln 3\cdot 10x = x3^{5x^2+1}.$$

2.2. $\int e^{1-3tgx}\frac{dx}{\cos^2 x} = \left[\frac{dx}{\cos^2 x} = dtgx = -\frac{1}{3}d(1-3tgx)\right] = -\frac{1}{3}\int e^{1-3tgx}d(1-3tgx) = -\frac{1}{3}e^{1-3tgx} + c.$

Проверку сделайте самостоятельно.

Используя формулы (3) и (3*а*), найдите:

14. $\int 7^{3-4\cos x}\sin x dx.$ 15. $\int e^{\frac{5-\sqrt{x}}{7}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}.$

2. Интегрирование тригонометрических функций по формулам (4)–(9)

При интегрировании по этим формулам под знаком интеграла надо иметь тригонометрические функции $\sin u$, $\cos u$, $\frac{1}{\cos^2 u}$, $\frac{1}{\sin^2 u}$, tgu, $ctgu$ и дифференциалы du их аргумента u.

Примеры:

2.3. $\int\frac{x^3dx}{\sin^2 x^4}=\left[x^3dx=\frac{1}{4}dx^4\right]=\frac{1}{4}\int\frac{dx^4}{\sin^2 x^4}=$ [формула (7) при $u=x^4$] $=-\frac{1}{4}ctgx^4+c.$

2.4. $\int tg(2-\sqrt{3}x)dx=\left[dx=-\frac{1}{\sqrt{3}}d(2-\sqrt{3}x)\right]=-\frac{1}{\sqrt{3}}\int tg(2-\sqrt{3}x)d(2-\sqrt{3}x)=$

$=$ [формула (8) при $u=2-\sqrt{3}x$] $=-\frac{1}{\sqrt{3}}(-\ln|\cos(2-\sqrt{3}x)|)+c=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|\cos(2-\sqrt{3}x)|+c.$

Найти интегралы 16–19(самостоятельно):

16. $\int ctg(\cos x)\sin x dx.$ 18.* $\int\frac{\cos x-6}{\sin^2 x}dx.$

17. $\int\frac{e^{2x}dx}{\cos^2(3-5e^{2x})}.$ 19.* $\int\frac{4+3\sin^2 x}{\cos^2 x}dx.$

3. Интегрирование по формулам (10)–(13)

Обратите внимание, что все эти формулы содержат u^2, т.е. квадрат функции, которая будет переменной интегрирования. Поэтому сначала нужно выделить эту функцию u, а затем создать ее дифференциал du.

Примеры:

2.5. $\int\frac{dx}{9x^2+7}=\int\frac{dx}{(3x)^2+(\sqrt{7})^2}=\frac{1}{3}\int\frac{d(3x)}{(3x)^2+(\sqrt{7})^2}=$ [формула (10), $u=3x$, $a=\sqrt{7}$] $=$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}arctg\frac{3x}{\sqrt{7}}+c=\frac{1}{3\sqrt{7}}arctg\frac{3x}{\sqrt{7}}+c.$

2.6. $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{5e^{2x}-8}}=\int\frac{e^x dx}{\sqrt{(\sqrt{5}e^x)^2-8}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{d(\sqrt{5}e^x)}{\sqrt{(\sqrt{5}e^x)^2-8}}=$ [формула (13), $u=\sqrt{5}e^x$, $A=-8$] $=$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left(\sqrt{5}e^x+\sqrt{(\sqrt{5}e^x)^2-8}\right)+c=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left(\sqrt{5}e^x+\sqrt{5e^x-8}\right)+c.$

2.7. $\int\frac{2^x dx}{4^x-3}=\int\frac{2^x dx}{(2^x)^2-(\sqrt{3})^2}=\left[2^x dx=\frac{1}{\ln 2}d2^x\right]=\frac{1}{\ln 2}\int\frac{d2^x}{(2^x)^2-(\sqrt{3})^2}=$ [формула (11), $u=2^x$,

$a=\sqrt{3}$] $=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{2^x-\sqrt{3}}{2^x+\sqrt{3}}\right|+c=\frac{1}{2\sqrt{3}\ln 2}\ln\left|\frac{2^x-\sqrt{3}}{2^x+\sqrt{3}}\right|+c.$

2.8. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{2-9ctg^2 x}}=\int\frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{(\sqrt{2})^2-(3ctgx)^2}}=\left[\frac{dx}{\sin^2 x}=-dctgx=-\frac{1}{3}d(3ctgx)\right]=$

$=-\frac{1}{3}\int\frac{d(3ctgx)}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-(3ctgx)^2}}=$ [формула (12), $u=3ctgx$, $a=\sqrt{2}$] $=-\frac{1}{3}\arcsin\frac{3ctgx}{\sqrt{2}}+c=$

$=\frac{1}{3}\arccos\frac{3ctgx}{\sqrt{2}}+c.$

Найти интегралы:

20. $\int\frac{dx}{4x^2-9}.$ 22. $\int\frac{\sqrt{e^x}dx}{\sqrt{5+e^x}}.$ 24. $\int\frac{\cos x dx}{8+7\sin^2 x}.$

21. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}.$ 23. $\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x-1}}.$ 25. $\int\frac{x^2+3x^5}{\sqrt{x^6+4}}dx.$

Выполните домашнее задание № 2.

ЗАНЯТИЕ 3

ОБЩИЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1. Метод разложения

Этот метод основан на разложении подынтегральной функции $f(x)$ на сумму функций, от каждой из которых первообразную можно найти проще, чем от данной $f(x)$.

Примеры:

3.1. $\int\frac{x^3-3\sqrt{x}+\sqrt{5}}{x}dx=\int\left(\frac{x^3}{x}-\frac{3\sqrt{x}}{x}+\frac{\sqrt{5}}{x}\right)dx=\int x^2dx-3\int\frac{dx}{\sqrt{x}}+\sqrt{5}\int\frac{dx}{x}=\frac{x^3}{3}-3\cdot 2\sqrt{x}+$

$+\sqrt{5}\ln|x|+c=\frac{1}{3}x^3-6\sqrt{x}+\sqrt{5}\ln|x|+c.$

3.2. $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2dx=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx=\int(1+\sin x)dx=\int dx+\int\sin x dx=$

$=x-\cos x+c.$

3.3 $\int\frac{x-7}{x+2}dx=\int\frac{(x+2)-9}{x+2}dx=\int\frac{x+2}{x+2}dx-9\int\frac{dx}{x+2}=\int dx-9\int\frac{d(x+2)}{x+2}=x-9\ln|x+2|+c.$

3.4. $\int\frac{3x-x^3}{\sqrt{4-x^4}}dx=\int\left(\frac{3x}{\sqrt{4-x^4}}-\frac{x^3}{\sqrt{4-x^4}}\right)dx=3\int\frac{xdx}{\sqrt{4-x^4}}-\int\frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^4}}=3\cdot\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{\sqrt{4-(x^2)^2}}-$

$-\frac{1}{4}\int\frac{dx^4}{\sqrt{4-x^4}}=\frac{3}{2}\int\frac{dx^2}{\sqrt{2^2-(x^2)^2}}+\frac{1}{4}\int\frac{d(4-x^4)}{\sqrt{4-x^4}}=$ [формулы (1б) и (12)] $=\frac{3}{2}\arcsin\frac{x^2}{2}+$

$+\frac{1}{2}\sqrt{4-x^4}+c.$

Решить самостоятельно задачи:

26. $\int\frac{3x-2}{x^2+4}dx.$ 27. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}.$ 28. $\int\left(x+\frac{1}{x}\right)^3dx.$

2. Метод замены переменной

Метод замены переменной или метод подстановки в неопределенном интеграле состоит в том, что при вычислении интеграла $\int f(x)dx$ вместо переменной x вводится новая переменная t, связанная с x определенной зависимостью: $x = \varphi(t)$.

При этом функция $\varphi(t)$ должна быть непрерывна и дифференцируема, и ее следует выбирать так, чтобы подынтегральная функция становилась более удобной для интегрирования. При замене переменной справедлива формула:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$$

После нахождения результата делается обратная замена, т.е. возвращаются к прежней переменной. Иногда замена переменной производится в виде $t = \psi(x)$.

Примеры:

3.5. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+2}} = \begin{bmatrix} \sqrt[3]{x+2} = t;\ x = t^3 - 2; \\ x+2 = t^3;\ dx = 3t^2dt \end{bmatrix} = \int \frac{(t^3-2)3t^2dt}{t} = 3\int(t^4-2t)dt = 3\int t^4dt - 6\int tdt = 3\frac{t^5}{5} -$

$-6\frac{t^2}{2} + c = \frac{3}{5}\sqrt[3]{(x+2)^5} - 3\sqrt[3]{(x+2)^2} + c.$

3.6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \begin{bmatrix} x = \frac{1}{t}; \\ dx = -\frac{1}{t^2}dt \end{bmatrix} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t + c = = -\arcsin\frac{1}{x} + c =$

$= \arccos\frac{1}{x} + c.$

3.7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+2)}} = \left[\sqrt{x} = t;\ x = t^2;\ dx = 2tdt\right] = \int \frac{2tdt}{t(t^2+2)} = 2\int \frac{dt}{t^2+(\sqrt{2})^2} = \frac{2}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}} + c =$

$= \sqrt{2}arctg\sqrt{\frac{x}{2}} + c.$

Заметим, что интеграл 3.7. можно свести к табличному:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+2)} = \int \frac{2d\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{2})^2} = 2\int \frac{d\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{2})} = \frac{2}{\sqrt{2}}arctg\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} + c = \sqrt{2}arctg\sqrt{\frac{x}{2}} + c.$$

К сожалению, нельзя дать общих правил, по которым следует выбирать ту или другую подстановку применительно к заданному интегралу; умение разыскивать удачные подстановки достигается практикой. Однако есть целые классы функций, которые можно проинтегрировать с помощью стандартных подстановок; они будут рассмотрены ниже.

Самостоятельно проинтегрировать:

29. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$. 30. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$. 31. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x}+1}$.

3. Метод интегрирования по частям

Формула интегрирования по частям имеет вид

$$\int u\,dv = uv - \int vdu.$$

Она позволяет свести вычисление интеграла $\int u\,dv$ к вычислению интеграла $\int v\,du$, который при удачном выборе u и v оказывается более простым.

Общего правила разбиения подынтегрального выражения $f(x)\,dx$ на множители $u = u(x)$ и $dv = dv(x)$ не существует, однако в интегралах типов 1 и 2 выбор $u = u(x)$ и $dv = dv(x)$ является стандартным.

1. Интегралы вида $\int P(x)a^{kx}dx;\ \int P(x)e^{kx}dx;\ \int P(x)\sin kxdx;\ \int P(x)\cos kxdx,$

где $P(x)$–многочлен, k–некоторое число.

Интегралы этого типа берутся по частям, если положить $u = P(x)$,

$$dv = \begin{Bmatrix} a^{kx} \\ e^{kx} \end{Bmatrix}dx, \quad dv = \begin{Bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{Bmatrix}dx.$$

2. Интегралы вида $\int P(x)\log_a xdx;\ \int P(x)\arcsin xdx;\ \int P(x)arctgxdx,$

где $P(x)$ –многочлен относительно x.

Во всех этих случаях $dv = P(x)dx$ и $u = \begin{Bmatrix} \log_a x \\ \arcsin x \\ arctgx \end{Bmatrix}$.

Примеры:

3.7. $\int (3x-7)e^{2x}dx = \begin{bmatrix} u = 3x-7; & du = 3dx; \\ dv = e^{2x}dx; & v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}e^{2x}(3x-7) - \int \frac{1}{2}e^{2x}3dx =$

$= \frac{1}{2}e^{2x}(3x-7) - \frac{3}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}(3x-7) - \frac{3}{4}e^{2x} + c = \frac{1}{4}e^{2x}(6x-17) + c.$

3.8. $\int \sqrt{x}\ln^2 xdx = \begin{bmatrix} u = \ln^2 x; & du = 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx; \\ dv = \sqrt{x}dx; & v = \int \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x\sqrt{x} \end{bmatrix} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln^2 x - \int 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{3}x\sqrt{x}dx =$

$= \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln^2 x - \frac{4}{3}\int \sqrt{x}\ln xdx = \begin{bmatrix} u = \ln x; & du = \frac{1}{x}dx; \\ dv = \sqrt{x}dx; & v = \frac{2}{3}x\sqrt{x} \end{bmatrix} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln^2 x - \frac{8}{9}x\sqrt{x}\ln x + \frac{8}{9}\int \sqrt{x}dx =$

$= \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln^2 x - \frac{8}{9}x\sqrt{x}\ln x + \frac{8}{9}\cdot\frac{2}{3}x\sqrt{x} + c = \frac{2}{27}x\sqrt{x}(9\ln^2 x - 12\ln x + 8) + c.$

Применяя формулу интегрирования по частям для вычисления интеграла, можно воспользоваться методом подведения функции под знак дифференциала.

3.9. $\int x\cdot arctgxdx = \int \underbrace{arctgx}_{u}\, d\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v} = \frac{x^2}{2}\cdot arctgx - \int \frac{x^2}{2}darctgx = \frac{x^2}{2}arctgx - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}dx =$

$= \frac{1}{2}x^2arctgx - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \frac{1}{2}x^2arctgx - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}x^2arctgx - \frac{1}{2}x +$

$+ \frac{1}{2}arctgx + c = \frac{x^2+1}{2}arctgx - \frac{x}{2} + c.$

Вычислить следующие интегралы:

32. $\int (1-x^2)\cos 2x dx.$ 35. $\int \frac{xdx}{\cos^2 4x}.$ 38.* $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

33. $\int \arcsin x dx.$ 36. $\int e^{2x}\cos x dx.$ 39.* $\int x^3 e^{x^2} dx.$

34. $\int x^2 e^{x^3} dx.$ 37.* $\int \sin\sqrt{x} dx.$ 40.* $\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$

Выполните домашнее задание № 3.

ЗАНЯТИЕ 4

ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

1.Интегрирование простейших рациональных дробей

Рассмотрим простейшие рациональные дроби следующих четырех типов:

1. $\frac{A}{x-a}.$ 2. $\frac{A}{(x-a)^k}.$ 3. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}.$ 4. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m},$

где A, B, a, p, q– действительные числа, k, m = 2, 3, …, а трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, т.е. $\frac{p^2}{4}-q<0.$

Интегрирование простейших дробей 1–го и 2–го типов не представляет никакого труда. В самом деле:

$$1.\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a|+c.$$

$$2.\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+c = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+c.$$

Перейдем к интегрированию рациональной дроби 3–го типа

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx.$$

Оно выполняется по следующему алгоритму:

1) выделим в знаменателе полный квадрат двучлена

$$x^2+px+q = x^2+2x\frac{p}{2}+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4};$$

1) находим дифференциал знаменателя:
$d(x^2+px+q) = (2x+p)dx;$

2) в числителе $Ax+B$ путем тождественных преобразований создаем выражение $2x+p$:

$$Ax+B = \frac{A}{2}(2x+p)-\frac{Ap}{2}+B.$$

Разбиваем данный интеграл на сумму двух:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)}{x^2+px+q}dx + \int \frac{B-\frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} +$$

$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}} = [\text{формулы (2) и (10)}] = \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{B-\frac{Ap}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\times$$

$$\times arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+c = \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+c.$$

Примеры:

$$4.1.\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2)+2}{x^2+2x+10}dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+10}+2\int \frac{dx}{x^2+2x+10} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+2x+10)}{x^2+2x+10}+2\int \frac{dx}{(x+1)^2+3^2} = \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+10)+\frac{2}{3}arctg\frac{x+1}{3}+c.$$

$$1)x^2+2x+10 = x^2+2\cdot x\cdot 1+1-1+10 = \underline{(x+1)^2+9};$$

$$2)d(x^2+2x+10) = (2x+2)dx;$$

$$3)3x+5 = \frac{3}{2}(2x+2)+2.$$

$$4.2.\int \frac{dx}{3x^2+7x+5} = \int \frac{dx}{3\left[\left(x+\frac{7}{6}\right)^2+\frac{11}{36}\right]} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{7}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x+\frac{7}{6}\right)}{\left(x+\frac{7}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{11}}{6}}arctg\frac{x+\frac{7}{6}}{\frac{\sqrt{11}}{6}}+c = \frac{2}{\sqrt{11}}arctg\frac{6x+7}{\sqrt{11}}+c.$$

$$3x^2+7x+5 = 3\left(x^2+\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}\right) = 3\left(x^2+2x\frac{7}{6}+\frac{49}{36}-\frac{49}{36}+\frac{5}{3}\right) = 3\left[\left(x+\frac{7}{6}\right)^2+\frac{11}{36}\right].$$

Способ интегрирования дробей 4–го типа можно изучить по учебнику [2, т.1, гл. X, §7] или воспользоваться справочниками [3],[4].

Вычислить интегралы:

41. $\int \frac{7x+2}{x^2-6x+8}dx.$ 42. $\int \frac{dx}{5x^2+3x-1}.$

2.Интегрирование неправильной рациональной дроби

Рациональной дробью называется функция, равная частному от деления двух многочленов $R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$– многочлен степени m, $Q_n(x)$– многочлен степени n. Рациональная дробь называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя, в противном случае рациональная дробь называется

неправильной. Например, $\frac{x+5}{x^2+4x-1}$; $\frac{3}{x+5}$; $\frac{7x^2+1}{8x^4-1}$; $\frac{1}{(x-2)^7}$ – правильные дроби; $\frac{4x+3}{x+2}$; $\frac{x^3-1}{x^2+4}$; $\frac{3-x^2}{x^2-5}$; $\frac{(x+2)^3}{x^2+2}$ – неправильные рациональные дроби.

Всякую неправильную рациональную дробь $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби. Разделив числитель $P(x)$ на знаменатель $Q(x)$, получим $\frac{P(x)}{Q(x)}=S(x)+\frac{r(x)}{Q(x)}$, где $S(x)$– частное, $r(x)$– остаток, $\frac{r(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь.

Например, пусть $R(x)=\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}$.

Разделим x^5+x^4-8 на x^3-4x "уголком"

$$
\begin{array}{l|l}
-\ x^5+x^4-8 & x^3-4x \\
\quad \underline{x^5-4x^3} & x^2+x+4 \\
\quad -\ x^4+4x^3-8 & \\
\qquad \underline{x^4-4x^2} & \\
\qquad -\ 4x^3+4x^2-8 & \\
\qquad\quad \underline{4x^3-16x} & \\
\qquad\qquad 4x^2+16x-8 &
\end{array}
$$

Получим частное $S(x)=x^2+x+4$ и остаток $r(x)=4x^2+16x-8$. Следовательно, $\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$. Таким образом, интегрирование неправильной рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ сводится к интегрированию многочлена $S(x)$ и правильной рациональной дроби $\frac{r(x)}{Q(x)}$.

Примеры:

4.2. $\int\frac{x^5+3x-1}{x^2-4}dx=\int\left(x^3+4x+\frac{19x-1}{x^2-4}\right)dx=\frac{x^4}{4}+4\cdot\frac{x^2}{2}+19\int\frac{xdx}{x^2-4}-\int\frac{dx}{x^2-4}=\frac{x^4}{4}+2x^2+$

$+\frac{19}{2}\int\frac{dx^2}{x^2-4}-\int\frac{dx}{x^2-2^2}=\frac{x^4}{4}+2x^2+\frac{19}{2}\int\frac{d(x^2-4)}{x^2-4}-\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|=\frac{x^2}{4}+2x^2+\frac{19}{2}\ln\left|x^2-4\right|-$

$-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c.$

$$
\begin{array}{l|l}
-\ x^5+3x-1 & x^2-4 \\
\quad \underline{x^5-4x^3} & x^3+4x \\
\quad -\ 4x^3+3x-1 & \\
\qquad \underline{4x^3-16x} & \\
\qquad\quad 19x-1 &
\end{array}
$$

4.3. $\int\frac{x^4}{x^2+9}dx=\int\frac{x^4-81+81}{x^2+9}dx=\int\left(\frac{x^4-81}{x^2+9}+\frac{81}{x^2+9}\right)dx=\int\frac{(x^2-9)(x^2+9)}{x^2+9}dx+81\int\frac{dx}{x^2+9}=$

$=\int(x^2-9)dx+81\int\frac{dx}{x^2+3^2}=\frac{x^3}{3}-9x+81\cdot\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3}+c=\frac{x^3}{3}-9x+27arctg\frac{x}{3}+c.$

В примере 4.3. целая часть выделена искусственным приемом: в числителе путем тождественных преобразований создан знаменатель и дробь разбита на два слагаемых. Иногда в числителе создается многочлен, делящийся нацело на знаменатель.

Самостоятельно вычислить:

43. $\int\frac{3x-7}{1-x}dx.$ 44. $\int\frac{x^5+3x^2-4}{x^2+3}dx.$ 45. $\int\frac{x^3dx}{x+2}.$

3. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие (метод неопределенных коэффициентов)

Любую правильную рациональную дробь можно разложить на простейшие дроби. При этом существенное значение имеет разложение знаменателя $Q(x)$ на произведение линейных и квадратных множителей, не имеющих действительных корней. Пусть, например,

$$Q(x)=(x-a)^k(x-b)^l(x^2+px+q)^r.$$

При разложении правильной рациональной дроби на простейшие необходимо знать следующее:

1) каждому неповторяющемуся множителю $(x-a)$ отвечает в разложении одна простая дробь вида $\frac{A}{x-a}$;

2) каждому множителю $(x-a)^k$ отвечает сумма k простых дробей вида:

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\dots+\frac{A_k}{(x-a)^k};$$

3) неповторяющему множителю x^2+px+q отвечает одна простая дробь $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$;

4) каждому множителю $(x^2+px+q)^r$ отвечает сумма r простых дробей вида:

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\dots+\frac{M_rx+N_r}{(x^2+px+q)^r},$$

где A, M, N, A_i, M_j, N_j $(i=\overline{1,k},\ j=\overline{1,r})$ – числовые коэффициенты.

После того, как правильная рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ записана в виде суммы простых дробей, в числителях которых стоят неопределенные буквенные коэффициенты, эти дроби приводят к общему знаменателю $Q(x)$. Затем отбрасываем знаменатель в обеих частях равенства и получаем равенство двух многочленов: слева – многочлен $P(x)$ с известными коэффициентами; а справа– многочлен с не-

известными коэффициентами. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой части, найдем неопределенные коэффициенты.

Пример:

4.4. $\dfrac{x^3+x^2-1}{x^4+4x^2}=\dfrac{x^3+x-1}{x^2(x^2+4)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+4}=\dfrac{Ax(x^2+4)+B(x^2+4)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2+4)}\Rightarrow$

$$x^3+x^2-1=Ax(x^2+4)+B(x^2+4)+(Cx+D)x^2.$$

$$x^3+x^2-1=(A+C)x^3+(B+D)x^2+4Ax+4B.$$

$$x^3:\ 1=A+C\Rightarrow C=1;$$

$$x^2:\ 1=B+D\Rightarrow D=\frac{5}{4};$$

$$x:\ \ 0=4A\ \Rightarrow A=0;$$

$$x^0:-1=4B\ \ \Rightarrow B=-\frac{1}{4}.$$

Значит,

$$\frac{x^3+x^2-1}{x^4+4x^2}=\frac{-\frac{1}{4}}{x^2}+\frac{x+\frac{5}{4}}{x^2+4}.$$

Неопределенные коэффициенты при разложении на простейшие дроби можно вычислить методом частных значений. Рассмотрим данный метод на примере:

4.5. $\dfrac{x+5}{x^3-3x^2+2x}=\dfrac{x+5}{x(x^2-3x+2)}=\dfrac{x+5}{x(x-1)(x-2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x-2}=$

$$=\frac{A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x-2)}.$$

$$A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-1)=x+5.$$

$$x=0\Rightarrow 2A=5\Rightarrow A=\frac{5}{2}.$$

$$x=1\Rightarrow -B=6\Rightarrow B=-6.$$

$$x=2\Rightarrow 2C=7\Rightarrow C=\frac{7}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{x+5}{x^3-3x^2+2x}=\frac{\frac{5}{2}}{x}+\frac{-6}{x-1}+\frac{\frac{7}{2}}{x-2}.$$

В задачах 46, 47 данные дроби представить в виде простейших дробей с неопределенными коэффициентами:

46. $\dfrac{x^2-4x+8}{(x+3)^3(x+1)^2}$. 47. $\dfrac{x-4}{(x+2)(x^2+1)^2}$.

Алгоритм интегрирования рациональной дроби:

1) неправильную рациональную дробь представить в виде суммы целой части (многочлена) и правильной дроби;
2) правильную дробь разложить на сумму простейших дробей со знаменателями, равными множителям знаменателя данной дроби;
3) проинтегрировать полученную сумму многочлена и простейших дробей почленно.

Пример:

4.6. $\displaystyle\int\frac{x^6+3x+1}{x(x-1)^2}dx.$

Подынтегральная дробь $\dfrac{x^6+3x+1}{x(x-1)^2}=\dfrac{x^6+3x+1}{x^3-2x^2+x}$ является неправильной. Выделим целую часть:

$$\begin{array}{r|l}
x^6+3x+1 & x^3-2x^2+x \\ \cline{2-2}
-\ \underline{x^6-2x^5+x^4} & x^3+2x^2+3x+4 \\
2x^5-x^4+3x+1 & \\
-\ \underline{2x^5-4x^4+2x^3} & \\
3x^4-2x^3+3x+1 & \\
-\ \underline{3x^4-6x^3+3x^2} & \\
4x^3-3x^2+3x+1 & \\
-\ \underline{4x^3-8x^2+4x} & \\
5x^2-x+1 &
\end{array}$$

Получили:

$$\frac{x^6+3x+1}{x^3-2x^2+x}=x^3+2x^2+3x+4+\frac{5x^2-x+1}{x^3-2x^2+x}.$$

Полученную правильную дробь разложили на простейшие:

$$\frac{5x^2-x+1}{x^3-2x^2+x}=\frac{5x^2-x+1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2}.$$

$$5x^2-x+1=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx.$$

Найдем коэффициенты A, B, C методом частных значений и методом неопределенных коэффициентов:

$$x=0\Rightarrow 5\cdot 0-0+1=A(0-1)^2+B\cdot 0+C\cdot 0\Rightarrow A=1.$$

$$x=1\Rightarrow 5\cdot 1^2-1+1=A(1-1)^2+B(1-1)+C\cdot 1\Rightarrow C=5.$$

$$x^2:\ \ 5=A+B\Rightarrow B=4.$$

Итак, $\dfrac{x^6+3x+1}{x(x-1)^2}=x^3+2x^2+3x+4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x-1}+\dfrac{5}{(x-1)^2}.$

Тогда

$$\int\frac{x^6+3x+1}{x(x-1)^2}dx=\int\left(x^3+2x^2+3x+4+\frac{1}{x}+\frac{4}{x-1}+\frac{5}{(x-1)^2}\right)dx=\int x^3dx+2\int x^2dx+3\int xdx+4\int dx+$$

$$+\int\frac{dx}{x}+4\int\frac{dx}{x-1}+5\int\frac{dx}{(x-1)^2}=\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x+\ln|x|+4\ln|x-1|-\frac{5}{x-1}+c.$$

Найти следующие интегралы:

48. $\displaystyle\int\frac{x^3}{(x+3)^2}dx.$ 49. $\displaystyle\int\frac{(x^2-7x)dx}{x^2-6x+8}.$ 50. $\displaystyle\int\frac{2x+3}{x^3(x+5)}dx.$

Выполните домашнее задание № 4.

ЗАНЯТИЕ 5

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ И НЕКОТОРЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Интегрирование тригонометрических функций

1) Интегралы вида $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$, m, n – целые числа.

Рассмотрим вначале случай, когда одно из чисел m или n нечетно. В этом случае интегралы сводятся к интегралам от рациональных функций.

Пример:

$$5.1.\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x dx = \int \cos^4 x \cdot \sin^2 x \cdot \sin x dx = \left[\sin^2 x = 1-\cos^2 x;\ \sin x dx = -d\cos x\right] =$$

$$= -\int \cos^4 x(1-\cos^2 x)d\cos x = -\int(\cos^4 x - \cos^6 x)d\cos x = \int \cos^6 x d\cos x - \int \cos^4 x d\cos x =$$

$$= \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + c.$$

Этот же метод применим и в том случае, когда одно из чисел m или n нечетно и положительно, а другое – любое действительное число.

Примеры:

$$5.2.\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos^3 x dx = \int \sin^{\frac{2}{3}} x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x dx = \left[\cos^2 x = 1-\sin^2 x;\ \cos x dx = d\sin x\right] =$$

$$= \int \sin^{\frac{2}{3}} x(1-\sin^2 x)d\sin x = \int \sin^{\frac{2}{3}} x d\sin x - \int \sin^{\frac{8}{3}} x d\sin x = \frac{3}{5}\sin^{\frac{5}{3}} x - \frac{3}{11}\sin^{\frac{11}{3}} x + c =$$

$$= \frac{3}{5}\sqrt[3]{\sin^5 x} - \frac{3}{11}\sqrt[3]{\sin^{11} x} + c.$$

$$5.3.\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{\cos^4 x \cdot \cos x}{\sin^2 x}dx = [\cos^2 x = 1-\sin^2 x;\ \cos x dx = d\sin x] =$$

$$= \int \frac{(1-\sin^2 x)^2 d\sin x}{\sin^2 x} = \int \frac{1-2\sin^2 x + \sin^4 x}{\sin^2 x}d\sin x = \int \frac{d\sin x}{\sin^2 x} - 2\int d\sin x + \int \sin^2 x \cdot d\sin x =$$

$$= -\frac{1}{\sin x} - 2\sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x + c.$$

Пусть теперь m и n – четные неотрицательные числа (в частности, одно из них может быть равным нулю), тогда используем формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x);\quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x);\quad \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Примеры:

$$5.4.\int \sin^2 \frac{x}{3}dx = \frac{1}{2}\int\left(1-\cos\frac{2x}{3}\right)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos\frac{2x}{3}dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{3}{2}\sin\frac{2x}{3} + c = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\sin\frac{2x}{3} + c.$$

$$5.5.\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx = \int(\sin x \cdot \cos x)^2 \cos^2 x dx = \int\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 \cdot \frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{16}\int(1-\cos 4x)dx +$$

$$+ \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d\sin 2x = \frac{1}{16}\left(\int dx - \int \cos 4x dx + \int \sin^2 2x d\sin 2x\right) = \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{3}\sin^3 2x\right) + c.$$

2) Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где $R(sinx, cosx)$ – рациональная функция относительно $sinx$ и $cosx$.

Всякий интеграл такого вида можно свести к интегралу от рациональной функции с помощью так называемой универсальной подстановки $tg\frac{x}{2} = t$.

Применяя формулы, известные из тригонометрии, имеем

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2};\qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Учитывая, что $tg\frac{x}{2} = t$, найдем $x = 2arctgt$; $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Подставляя выражения $sinx$, $cosx$ и dx через t, получим:

$$\int R(\sin x; \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2};\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}dt,$$

где уже под знаком интеграла стоит рациональная функция от переменной t.

Пример:

$$5.6.\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x} = \begin{bmatrix} t = tg\frac{x}{2}, & \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt, & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{5-4\cdot\frac{2t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{5(1+t^2)-8t+3(1-t^2)} = 2\int \frac{dt}{2t^2-8t+8} = \int \frac{dt}{(t-2)^2} = -\frac{1}{t-2} + c = \frac{1}{2-tg\frac{x}{2}} + c.$$

3) Интегралы вида $\int R(tgx)dx$; $\int R(ctgx)dx$.

Эти интегралы можно взять заменой $tgx = t$; $ctgx = t$.

В самом деле, так как $x = arctgt$, то $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\int R(tgx)dx = \int R(t)\frac{dt}{1+t^2}$.

Подынтегральное выражение в последнем интеграле является рациональной функцией от t.

Пример:

$$5.7.\int tg^3 x dx = \left[tgx = t,\ x = arctgt,\ dx = \frac{dt}{1+t^2}\right] = \int t^3\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^3}{1+t^2}dt =$$

$$= \int \frac{t^3+t-t}{t^2+1}dt = \int \frac{t(t^2+1)-t}{1+t^2}dt = \int\left(t - \frac{t}{1+t^2}\right)dt = \int t dt - \int \frac{t dt}{1+t^2} = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} = \frac{1}{2}t^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\ln(t^2+1) + c = \frac{1}{2}tg^2 x - \frac{1}{2}\ln(tg^2 x+1) + c = \left[1+tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\right] = \frac{1}{2}tg^2 x + \ln|\cos x| + c.$$

Заметим, что 5.7 можно свести к табличному, применив формулу $1+tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

$$\int tg^3 x dx = \int tg^2 x \cdot tgx dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)tgx dx = \int tgx\frac{dx}{\cos^2 x} - \int tgx dx = \int tgx d(tgx) - \int tgx dx =$$

$$=\frac{tg^2x}{2}+\ln|\cos x|+c=\frac{1}{2}tg^2x+\ln|\cos x|+c.$$

Подстановкой $tgx = t$ берутся интегралы $\int R(sinx,\ cosx)dx$, если $sinx$ и $cosx$ входят в четных степенях. В этом случае

$$\sin^2 x=\frac{1}{1+ctg^2x}=\frac{tg^2x}{1+tg^2x};\qquad \cos^2 x=\frac{1}{1+tg^2x}.$$

Пример:

$$5.8.\int\frac{dx}{1+\cos^2 x}=\begin{bmatrix} tgx=t; & dx=\frac{dt}{1+t^2}; \\ \cos^2 x=\frac{1}{1+tg^2x}=\frac{1}{1+t^2} & \end{bmatrix}=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{1}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{1+t^2+1}=\int\frac{dt}{t^2+2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}+c=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{tgx}{\sqrt{2}}+c.$$

4) Интегралы вида $\int sin\ nx\cdot cos\ mxdx$; $\int sin\ nx\cdot sin\ mxdx$; $\int cos\ nx\cdot cos\ mxdx$; $n,\ m$ –постоянные числа.

Подынтегральные функции легко сводятся к сумме первых степеней синусов и косинусов с помощью известных формул тригонометрии:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\ \sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

Пример:

$$5.9.\int\sin 3x\sin 5xdx=\frac{1}{2}\int(\cos 2x-\cos 8x)dx=\frac{1}{2}\int\cos 2xdx-\frac{1}{2}\int\cos 8xdx=$$

$$=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+c.$$

Вычислить самостоятельно:

51. $\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx.$

52. $\int(2-3\sin x)^2dx.$

53. $\int\sin^3 xdx.$

54. $\int\frac{dx}{5+4\sin x}.$

55. $\int\cos^4\frac{x}{2}dx.$

56. $\int\frac{dx}{1+tgx}.$

57. $\int\sin\frac{x}{2}\cdot\cos 3xdx.$

58. $\int\cos 4x\cdot\cos xdx.$

2. Интегрирование иррациональных функций

1) Интегралы вида $\int R(x;\sqrt[n]{ax+b})dx$, где n – целое число, а $R(x;\sqrt[n]{ax+b})$ – рациональное выражение относительно x и $\sqrt[n]{ax+b}$.

Данный интеграл может быть сведен к интегралу от рациональной функции с помощью замены $ax+b=t^n$, тогда

$$x=\frac{1}{a}(t^n-b);\quad dx=\frac{n}{a}t^{n-1}dt.$$

Следовательно,

$\int R(x;\sqrt[n]{ax+b})dx=\int R\left(\frac{1}{a}(t^n-b);t\right)\cdot\frac{n}{a}t^{n-1}dt$, т. е. подынтегральная функция оказывается рациональной функцией от t.

Пример:

$$5.10.\int\frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}dx=\begin{bmatrix}\sqrt{x}=t; \\ x=t^2;dx=2tdt\end{bmatrix}=\int\frac{1-t}{t^2-2t}\cdot 2tdt=2\int\frac{1-t}{t-2}dt=-2\int\frac{(t-2)+1}{t-2}dt=$$

$$=-2\int dt-2\int\frac{dt}{t-2}=-2t-2\ln|t-2|+c=-2\sqrt{x}-2\ln|\sqrt{x}-2|+c.$$

2) Аналогично вычисляются интегралы вида $\int R\left(x;\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$. Рационализация этого интеграла достигается с помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$.

Пример:

$$5.11.\int\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx=\begin{bmatrix}\frac{1+x}{x}=t^2;dx=\frac{-2tdt}{(t^2-1)^2}; \\ x=\frac{1}{t^2-1};\end{bmatrix}=\int t\cdot\frac{-2tdt}{(t^2-1)^2}=-2\int\frac{t^2dt}{(t^2-1)^2}=$$

$$=\begin{bmatrix}u=t; & du=dt; \\ dv=\frac{tdt}{(t^2-1)^2};v=-\frac{1}{2(t^2-1)} & \end{bmatrix}=-2\left(-\frac{t}{2(t^2-1)}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-1}\right)=\frac{t}{t^2-1}-\int\frac{dt}{t^2-1}=\frac{t}{t^2-1}-$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c=\frac{\sqrt{\frac{1+x}{x}}}{\frac{1+x}{x}-1}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1}{\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1}\right|+c=\sqrt{x(1+x)}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}\right|+c.$$

К интегралу вида 1 и 2 приводится интеграл

$\int R\left(x;\sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}};\ \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}};\ ...;\ \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ с помощью замены $\frac{ax+b}{cx+d}=t^r$,

где r – наименьшее общее кратное всех показателей $n_1,n_2,...,n_k$.

Пример:

$$5.12.\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}(1+\sqrt[3]{x-1})}=\begin{bmatrix}x-1=t^6; \\ dx=6t^5dt\end{bmatrix}=\int\frac{6t^5dt}{t^3(1+t^2)}=6\int\frac{t^2dt}{t^2+1}=6\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt=$$

$$=6t-6\int\frac{dt}{t^2+1}=6t-6arctgt+c=6\cdot\sqrt[6]{x-1}-6arctg\sqrt[6]{x-1}+c.$$

Найти интегралы:

59. $\int\frac{3\sqrt{x}+5}{1-\sqrt{x}}dx.$

60. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}+5}.$

61. $\int arctg\sqrt{x}dx.$

3) Интегралы вида $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{x^2+px+q}}dx.$

Данные интегралы сводятся к сумме двух табличных интегралов методом, изложенным при интегрировании дробей $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$.

Пример:

$$5.13.\int \frac{4x-8}{\sqrt{x^2+6x-2}}dx = \int \frac{2(2x+6)-20}{\sqrt{x^2+6x-2}}dx = 2\int \frac{(2x+6)dx}{\sqrt{x^2+6x-2}} - 20\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x-2}} =$$

$$= 2\int \frac{d(x^2+6x-2)}{\sqrt{x^2+6x-2}} - 20\int \frac{d(x+3)}{\sqrt{(x+3)^2-11}} = 4\sqrt{x^2+6x-2} - 20\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x-2}\right| + c.$$

1) $x^2+6x-2=(x+3)^2-11;$

2) $d(x^2+6x-2)=(2x+6)dx;$

3) $4x-8=2(2x+6)-20.$

$$5.14.\int \frac{xdx}{\sqrt{5+2x-x^2}} = \int \frac{-\frac{1}{2}(2-2x)+1}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(2-2x)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(5+2x-x^2)}{\sqrt{5+2x-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{6-(x-1)^2}} = -\sqrt{5+2x-x^2} + \arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}} + c.$$

1) $5+2x-x^2=-(x^2-2x-5)=6-(x-1)^2;$

2) $d(5+2x-x^2)=(2-2x)dx;$

3) $x=-\frac{1}{2}(2-2x)+1.$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОДСТАНОВКИ ПРИ ИНТЕГРИРОВАНИИ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

$$\int R(x;\sqrt{a^2-x^2})dx, \quad x = a\sin t;$$

$$\int R(x;\sqrt{x^2-a^2})dx, \quad x = \frac{a}{\cos t};$$

$$\int R(x;\sqrt{x^2+a^2})dx, \quad x = a\,tgt.$$

$$5.15.\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx = \left[x=2\sin t,\ dx=2\cos t dt\right] = \int \frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{4\sin^2 t}2\cos t dt = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt = \int ctg^2 t dt =$$

$$= \int\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt = \int \frac{dt}{\sin^2 t} - \int dt = -ctgt - t + c =$$

$$= \left[ctgt = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}{\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x};\ t = \arcsin\frac{x}{2}\right] = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{2} + c.$$

Выполните домашнее задание № 5.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ СПРАВОЧНИКА

Рассмотрим на примерах, как пользоваться справочником [4] при вычислении некоторых интегралов.

Примеры:

$$5.16.\int \frac{x^2dx}{(3x+7)^3} = \left[\text{формула (11) } \int \frac{x^2dx}{X^3} = \frac{1}{a^3}\left(\ln X + \frac{2b}{X} - \frac{b^2}{2X^2}\right), \text{ где } X=3x+7, \text{ т.е. } a=3,\ b=7\right] =$$

$$= \frac{1}{3^3}\left(\ln|3x+7| + \frac{2\cdot 7}{3x+7} - \frac{7^2}{2(3x+7)^2}\right) + c = \frac{1}{27}\left(\ln|3x+7| + \frac{14}{3x+7} - \frac{49}{2(3x+7)^2}\right) + c.$$

$$5.17.\int \frac{dx}{(1+\sin 5(2x+3))^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+3)}{(1+\sin 5(2x+3))^2} =$$

$$= \left[\text{формула (299) } \int \frac{dx}{(1+\sin ax)^2} = -\frac{1}{2a}tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{6a}tg^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right),\ a=5\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2\cdot 5}tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5(2x+3)}{2}\right) - \frac{1}{6\cdot 5}tg^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5(2x+3)}{2}\right)\right) + c =$$

$$= -\frac{1}{20}tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5(2x+3)}{2}\right) - \frac{1}{60}tg^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5(2x+3)}{2}\right) + c.$$

В этом примере использовано свойство инвариантности интеграла относительно переменной интегрирования $(2x+3)$.

$$5.18.\int \frac{(3x-1)dx}{(2x^2+x+1)^2} = 3\int \frac{xdx}{(2x^2+x+1)^2} - \int \frac{dx}{(2x^2+x+1)^2} =$$

$$= \left[\begin{array}{c}\text{формула (45) } \int \frac{xdx}{X^2} = -\frac{bx+2c}{\Delta X} - \frac{b}{\Delta}\int \frac{dx}{X};\ \text{формула (41) } \int \frac{dx}{X^2} = \frac{2ax+b}{\Delta X} + \frac{2a}{\Delta}\int \frac{dx}{X};\\ X = ax^2+bx+c,\ \Delta = 4ac-b^2,\ a=2,\ b=1,\ c=1\end{array}\right] =$$

$$= 3\left(-\frac{x+2}{7(2x^2+x+1)} - \frac{1}{7}\int \frac{dx}{2x^2+x+1}\right) - \left(\frac{4x+1}{7(2x^2+x+1)} + \frac{4}{7}\int \frac{dx}{2x^2+x+1}\right) = -\frac{3}{7}\frac{x+2}{2x^2+x+1} -$$

$$-\frac{4x+1}{7(2x^2+x+1)} - \int \frac{dx}{2x^2+x+1} = \left[\text{формула (40) } \int \frac{dx}{X} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}}arctg\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}};\ \Delta = 4ac-b^2 = 7 > 0\right] =$$

$$= \frac{3x+6+4x+1}{7(2x^2+x+1)} - \frac{2}{\sqrt{7}}arctg\frac{4x+1}{\sqrt{7}} + c = -\frac{x+1}{2x^2+x+1} - \frac{2}{\sqrt{7}}arctg\frac{4x+1}{\sqrt{7}} + c.$$

Данный интеграл был разбит на сумму интегралов, приведенных в справочнике.

Вычислить с помощью справочника:

62. $\int \frac{x-5}{x^3+8}dx.$ 63. $\int \frac{3x^2-2}{\sqrt{(2+x^2)^3}}dx$ 64. $\int \frac{dx}{2+\cos x-\sin x}.$

ОТВЕТЫ

2. $\ln|x-5|+c.$ 3. $-\frac{1}{2(x+\sqrt{2})^2}+c.$ 4. $-\frac{1}{6}\ln|5-3x^2|+c.$ 5. $\frac{\ln^3 x}{3}+c.$ 6. $-\frac{1}{2}\sqrt{9-4e^x}+c.$

7. $\frac{1}{16}\ln|8e^{2x}-9|+c.$ 8. $\frac{2}{3}\sin x\sqrt{\sin x}+c.$ 9. $\ln|\ln x|+c.$ 10. $\frac{1}{\cos x}+c.$ 11. $3tgx-2tg^2x+c.$

12. $-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+c.$ 13. $x-3\ln|x+3|+c.$ 14. $\frac{1}{4\ln 7}7^{3-4\cos x}+c.$ 15. $-14e^{\frac{5-\sqrt{x}}{7}}+c.$

16. $-\ln|\sin(\cos x)|+c$. 17. $-\frac{1}{10}tg(3-5e^{2x})+c$. 18. $6ctgx-\frac{1}{\sin x}+c$. 19. $7tgx-3x+c$.

20. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right|+c$. 21. $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}+c$. 22. $2\ln\left(e^{\frac{x}{2}}+\sqrt{e^x+5}\right)+c$. 23. $\ln\left|\ln x+\sqrt{\ln^2 x-1}\right|+c$.

24. $\frac{1}{2\sqrt{14}}arctg\frac{\sqrt{7}\sin x}{2\sqrt{2}}+c$. 25. $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+\sqrt{x^6+4}\right|+\sqrt{x^6+4}+c$. 26. $\frac{3}{2}\ln(x^2+4)-arctg\frac{x}{2}+c$.

27. $-2ctg2x+c$. 28. $\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{2x^2}+3\ln|x|+c$. 29. $2\left(\sqrt{x+1}-\ln(\sqrt{x+1}+1)\right)+c$.

30. $\ln\frac{\left|\sqrt{e^x+1}-1\right|}{\left|\sqrt{e^x+1}+1\right|}+c$. 31. $6\left(\frac{x\sqrt[6]{x}}{7}-\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{\sqrt{x}}{3}-\sqrt[6]{x}+arctg\sqrt[6]{x}\right)+c$.

32. $\frac{3-2x^2}{4}\sin 2x-\frac{1}{2}x\cos 2x+c$. 33. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+c$. 34. $\frac{1}{3}e^{x^3}+c$.

35. $\frac{x}{4}tg4x+\frac{1}{16}\ln|\cos 4x|+c$. 36. $\frac{1}{5}e^{2x}(2\cos x+\sin x)+c$. 37. $2\left(\sin\sqrt{x}-\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\right)+c$.

38. $\frac{1}{2}\left(\arcsin x-x\sqrt{1-x^2}\right)+c$. 39. $\frac{x^2-1}{2}e^{x^2}+c$. 40. $\frac{1}{2}\left(\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)+c$.

41. $\frac{7}{2}\ln|x^2-6x+8|+\frac{23}{2}\ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right|+c$. 42. $\frac{1}{\sqrt{29}}\ln\left|\frac{10x+3-\sqrt{29}}{10x+3+\sqrt{29}}\right|+c$. 43. $-3x+4\ln|x-1|+c$.

44. $\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+3x+\frac{9}{2}\ln(x^2+3)-\frac{13}{\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+c$. 45. $\frac{x^3}{3}-x^2+4x-8\ln|x+2|+c$.

46. $\frac{A}{(x+3)^3}+\frac{B}{(x+3)^2}+\frac{C}{x+3}+\frac{D}{(x+1)^2}+\frac{E}{x+1}$. 47. $\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}$.

48. $\frac{x^2}{2}-6x+27\ln|x+3|+\frac{27}{x+3}+c$. 49. $\ln|x|+5\ln|x-2|-6\ln|x-4|+c$.

50. $-\frac{3}{10x^2}-\frac{7}{25x}+\frac{7}{125}\ln\left|\frac{x+5}{x}\right|+c$. 51. $-\frac{1}{\sin x}+c$. 52. $\frac{17}{2}x+12\cos x-\frac{9}{4}\sin 2x+c$.

53. $\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+c$. 54. $\frac{2}{3}arctg\frac{5tg\frac{x}{2}+4}{3}+c$. 55. $\frac{1}{16}(6x+8\sin x+\sin 2x)+c$.

56. $\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+\frac{1}{2}x+c$. 57. $\frac{1}{5}\cos\frac{5x}{2}-\frac{1}{7}\cos\frac{7x}{2}+c$. 58. $\frac{1}{30}(3\sin 5x+5\sin 3x)+c$.

59. $-2\left(\frac{3}{2}x+8\sqrt{x}+8\ln\left|\sqrt{x}-1\right|\right)+c$. 60. $\frac{\sqrt[4]{(x+2)^3}}{3}-\frac{5\sqrt{x+2}}{2}+25\sqrt[4]{x+2}-125\ln\left(\sqrt[4]{x+2}+5\right)+c$.

61. $(x+1)arctg\sqrt{x}-\sqrt{x}+c$. 62. $\frac{7}{24}\ln\frac{4-2x+x^2}{(2+x)^2}-\frac{3}{4\sqrt{3}}arctg\frac{x-1}{\sqrt{3}}+c$.

63. $-\frac{4x}{\sqrt{x^2+2}}+3\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)+c$. 64. $\sqrt{2}arctg\left(\sqrt{2}tg\frac{x+\frac{3\pi}{4}}{2}+1\right)+c$.

Задание 1

	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
1	$(2-5x)^4$	$x^2\sqrt{1-2x^3}$	$(8x-3)^6$	$\frac{1}{(1-6x)^3}$	$(3-2x)^6$	$\frac{1}{3x+\sqrt{3}}$	$\frac{3}{7-2x}$	$\frac{1}{(5x-3)^3}$
2	$\frac{1}{\sqrt[5]{7x-1}}$	$\frac{\cos 3x}{7\sin 3x-1}$	$\frac{1}{7-\sqrt{3}x}$	$\frac{x}{(2-3x^2)^2}$	$\frac{1}{\sqrt{5x-1}}$	$\frac{x}{(5x^2-1)^2}$	$(2-5x)^6$	$\frac{1}{8-3x}$
3	$\frac{x}{\sqrt{5x^2+6}}$	$\frac{4}{x\sqrt{10-3\ln x}}$	$x\sqrt[4]{(3-x^2)^3}$	$\sin x(3-\cos x)^2$	$\frac{x}{\sqrt{7-x^2}}$	$\frac{7x^2}{\sqrt{3x^3+8}}$	$\frac{x}{\sqrt{4-3x^2}}$	$\frac{4x}{(7x^2+5)^2}$
4	$\frac{\cos 4x}{6\sin 4x-7}$	$\frac{3x\sqrt{x}+\sqrt{\ln x}}{x}$	$\frac{5x^2}{(4-3x^3)^2}$	$\frac{1}{x\sqrt{5-3\ln x}}$	$\frac{x^2}{(2x^3-9)^2}$	$\frac{1}{x\sqrt[6]{\ln^5 x}}$	$\frac{x^2}{(4-x^3)^2}$	$\frac{x^2}{\sqrt{4-3x^3}}$
5	$\frac{5}{x(2-\sqrt{3}\ln x)^2}$	$\frac{(2-5tgx)^2}{\cos^2 x}$	$\frac{\sin x/5}{\sqrt{3\cos x/5+1}}$	$\frac{x^2\sqrt{x}+\sqrt{\ln x}}{x}$	$\frac{\sqrt{2}}{x\sqrt[6]{\sqrt{3}-4\ln x}}$	$\frac{x}{5}\cos\frac{x}{5}\sqrt{3\sin\frac{x}{5}}$	$\frac{\sin x/7}{(\cos(x/7)-3)^4}$	$\frac{3+\sqrt[3]{x^4}-x\ln x}{x^2}$
6	$\frac{1}{\sin^2 x(7+2ctgx)}$	$\frac{e^{x/4}}{\sqrt[7]{1-3e^{x/4}}}$	$\frac{7\ln^2 x-4\sqrt[4]{x}}{x}$	$\frac{\sqrt[5]{3}-\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\cos 5x}{(2\sin 5x+3)^2}$	$\frac{x\sqrt{2}-\ln x}{x}$	$\frac{e^x}{1-3e^x}$	$\cos 3x\sqrt[7]{\sin 3x}$
7	$\frac{x-3\sqrt[3]{x}}{x^2}$	$\frac{1}{arctg^3 x(1+x^2)}$	$\frac{\sqrt{3}-arcctgx}{1+x^2}$	$e^{x/2}\sqrt{9-e^{x/2}}$	$\frac{3+x\sqrt{3}-\ln x}{x}$	$\frac{(2tgx-3)^4}{\cos^2 x}$	$\frac{\sqrt[3]{x^2}-x\ln x}{x^2}$	$\frac{\sqrt{3}\ln x-1}{x}$
8	$x^2\sqrt{10-x^3}$	$\frac{x^2}{(3x^3-1)^3}$	$\frac{e^x}{\sqrt[7]{e^x-1}}$	$\frac{4}{\cos^2 x(1-2tgx)}$	$\frac{(2+3arctgx)^3}{1+x^2}$	$\frac{e^{2x}}{5e^{2x}+1}$	$\sqrt{\frac{7-\arcsin x}{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt[5]{arcctgx}}{1+x^2}$
9	$e^{2x}\sqrt[5]{3e^{2x}-1}$	$\frac{1}{5-7x}$	$\frac{5}{x(3\ln x-5)^4}$	$\frac{1}{\sqrt{5x-1}}$	$e^{3x}\sqrt[4]{3e^{3x}-1}$	$\frac{\sqrt[5]{\arccos^3 x}}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt[6]{ctg^5 x}}{\sin^2 x}$	$\frac{e^{x/7}}{4-3e^{x/7}}$
10	$\frac{2}{\arccos x\sqrt{1-x^2}}$	$\sqrt{\frac{2-\arcsin x}{1-x^2}}$	$\frac{1}{\cos^2 2x(1-tg2x)}$	$\frac{x^2}{\sqrt[3]{1-2x^3}}$	$\frac{\sqrt{2ctgx-1}}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{5-3x}}$	$\frac{1}{\sqrt[7]{(1-8x)^3}}$	$\frac{1}{\sqrt[6]{(1-3x)^5}}$

Продолжение задания1

	1.9	1.10	1.11	1.12	1.13	1.14	1.15	1.16
1	$(7x+6)^{\sqrt{2}}$	$(2-3x)^{15}$	$\frac{1}{8+3x}$	$\sqrt[7]{5+7x}$	$\frac{1}{(3x-5)^6}$	$(1-7x)^6$	$\frac{\cos x/4}{\sqrt{3\sin x/4+1}}$	$(3x-7)^6$
2	$\frac{1}{3-5x+\sqrt{2}}$	$\frac{1}{7-4x}$	$x^3(5-x^4)^2$	$\frac{\sqrt[3]{x}-\ln x}{x}$	$\frac{e^{2x}}{1-3e^{2x}}$	$\frac{1}{5x-1}$	$\frac{arctg^5 x}{1+x^2}$	$\frac{1}{3-5x}$
3	$\frac{7x}{\sqrt{3x^2-5}}$	$\cos 2x\sqrt{1-\sin 2x}$	$\frac{\sqrt{1+ctg2x}}{\sin^2 2x}$	$\frac{1}{8-3x}$	$\frac{\sqrt[3]{x}-x}{x^6}$	$\sin 6x\sqrt[5]{1-\cos 6x}$	$\frac{x}{\sqrt[3]{2-x^2}}$	$\frac{x^3+2\sqrt{x}}{x}$
4	$\frac{\cos 4x}{1+6\sin 4x}$	$\frac{x}{\sqrt[5]{(1+x^2)^3}}$	$\frac{2x-1}{\sqrt[3]{x}}$	$\frac{5x^2}{x^3+6}$	$\frac{x^2}{\sqrt{5-3x^3}}$	$\frac{x^2}{(1-5x^3)^3}$	$\frac{e^{5x}}{(1+3e^{5x})^4}$	$\frac{x}{(8-5x^2)^2}$
5	$\frac{5}{x(3-4\ln x)^2}$	$\frac{1}{x(2\ln x-5)}$	$\frac{x}{(3x^2-1)^2}$	$\frac{\cos 2x}{\sqrt{7-5\sin 2x}}$	$\frac{1}{x(5-\ln x)}$	$\frac{1}{x\sqrt{4-7\ln x}}$	$\frac{1}{(1-2x)^2}$	$\frac{\sqrt[4]{2\ln x-1}}{x}$
6	$\frac{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[3]{\ln x}}{x}$	$x^2\sqrt[3]{1-4x^3}$	$\frac{\sin x/4}{5\cos x/4+3}$	$\sqrt{\frac{\arccos x}{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1+2tgx}}{\cos^2 x}$	$\frac{x}{(2x^2-5)^2}$	$\frac{x}{3x^2-4}$	$\frac{\cos x/3}{\sqrt[3]{2-4\sin x/3}}$
7	$\frac{\sqrt{6-5tg3x}}{\cos^2 3x}$	$\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}$	$\frac{e^x}{\sqrt[3]{(e^x+1)^2}}$	$\frac{1}{e^x(5+3e^{-x})^2}$	$\frac{arctg^4 x}{1+x^2}$	$e^{2x}\sqrt{3+e^{2x}}$	$\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}$	$\frac{e^{2x}}{7-5e^{2x}}$
8	$\frac{\sqrt[6]{arctgx}}{1+x^2}$	$\frac{e^{x/3}}{(3e^{x/3}+1)^2}$	$\frac{1}{x\sqrt{5-3\ln x}}$	$\frac{(9\ln x-5)^6}{x}$	$\frac{\sin x/5}{\sqrt[6]{3\cos x/5-1}}$	$\frac{x^2-3\ln x}{x}$	$\frac{\sqrt{2tg3x-5}}{\cos^2 3x}$	$\frac{x^2}{(x^3+1)^6}$
9	$\frac{x^2}{\sqrt[4]{1+3x^3}}$	$\frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{arctgx}{1+x^2}$	$\frac{tg^3 x}{\cos^2 x}$	$x\sqrt[7]{(1-x^2)^5}$	$\frac{1}{\cos^2 2x(1+tg2x)}$	$\frac{1}{x(6\ln x-1)}$	$\frac{\sqrt[5]{\arcsin 5x}}{\sqrt{1-25x^2}}$
10	$\frac{e^{x/3}}{(4e^{x/3}+5)^7}$	$\frac{1}{\cos^2 x\sqrt{1-tgx}}$	$x^2\sqrt[6]{3x^3-1}$	$\frac{x}{\sqrt[4]{1-2x^2}}$	$\frac{1}{\arccos^2 x\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{e^x}{\sqrt[6]{(1+e^x)^7}}$	$x^2\sqrt[3]{(1-x^3)^7}$	$\frac{1}{\cos^2 x\sqrt{1-3tgx}}$

Продолжение задания 1

	1.17	1.18	1.19	1.20	1.21	1.22	1.23
1	$\frac{1}{(5x-1)^2}$	$(10x+1)^9$	$\frac{3}{3-5x}$	$\frac{3}{(7x-2)^2}$	$(6-5x)^3$	$\frac{2}{5-3x}$	$\frac{(3+arctgx)^4}{1+x^2}$
2	$\frac{x}{3+8x^2}$	$\frac{3x^3+\sqrt{\ln x}}{x}$	$\frac{x^2}{\sqrt{3x^3-1}}$	$\frac{1}{5-4x}$	$\frac{1}{2x-\sqrt{3}}$	$\frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt[4]{x}}$	$x\sqrt[3]{3x^2+1}$
3	$\frac{\sin 4x}{(1-3\cos 4x)^3}$	$\frac{1}{11x-3}$	$(7x-6)^2$	$x\sqrt[3]{1-x^2}$	$\frac{x}{4x^2-1}$	$\frac{x^2}{\sqrt[4]{5x^3-7}}$	$\frac{x^3}{1-5x^4}$
4	$\frac{\sqrt{2-5tgx}}{\cos^2 x}$	$\frac{x^2}{(7x^3-1)^2}$	$\frac{e^{3x}}{5-2e^{3x}}$	$\frac{\sin x/5}{2\cos x/5-1}$	$\frac{1}{x(3\ln x-1)^2}$	$\frac{\sin 4x}{\sqrt{3-\cos 4x}}$	$\frac{\cos x}{\sqrt{6\sin x+7}}$
5	$\frac{e^{4x}}{3e^{4x}-1}$	$e^x\sqrt{5e^x-1}$	$\frac{\cos x/2}{\sqrt[3]{1-5\sin x/2}}$	$\sqrt{\frac{\arccos 2x}{1-4x^2}}$	$\frac{\sqrt{5-2ctgx}}{\sin^2 x}$	$\frac{4}{x(5-2\ln x)^2}$	$\frac{1}{x\ln^6 x}$
6	$\frac{(x+\sqrt{x})^2}{x^2}$	$\frac{\cos 2x}{4\sin 2x-3}$	$\frac{1}{x(4+7\ln x)^2}$	$\frac{x^2}{\sqrt{3x^3-1}}$	$\frac{\cos 3x}{\sin^5 3x}$	$\sqrt{\frac{\arcsin^3 2x}{1-4x^2}}$	$\frac{2\sqrt{x}-3x\ln x}{x^2}$
7	$\frac{x^2}{\sqrt{1-7x^3}}$	$\frac{5}{x(2\ln x-7)}$	$\frac{7}{arctg^3 x(1+x^2)}$	$\frac{5}{x(7-3\ln x)^6}$	$\frac{\sqrt[3]{3-arcctgx}}{1+x^2}$	$\frac{\cos x/3}{\sin^4 x/3}$	$\frac{\sqrt[6]{2tg3x-1}}{\cos^2 3x}$
8	$\frac{1}{x\sqrt[3]{\ln^5 x}}$	$\frac{1}{\sin^2 x\sqrt{1+2ctgx}}$	$\frac{(2\sqrt{x}-3)^2}{x}$	$\frac{\sqrt{x}-x\ln x}{x^2}$	$\frac{\sqrt[3]{x}-\ln^3 x}{x}$	$(2-9x)^6$	$\frac{2}{5x+13}$
9	$\frac{\arccos x/2}{\sqrt{4-x^2}}$	$\frac{\sqrt[3]{2arcctgx-1}}{1+x^2}$	$\frac{\sqrt{4ctgx-1}}{\sin^2 x}$	$\frac{e^x}{\sqrt[4]{3e^x-1}}$	$\frac{e^{x/3}}{\sqrt[4]{2-e^{x/3}}}$	$\frac{\sqrt[5]{3-7tgx}}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{e^x\sqrt[4]{1-e^{-x}}}$
10	$\frac{\sqrt{1+arctgx}}{1+x^2}$	$\frac{e^{3x}}{\sqrt[5]{4e^{3x}-1}}$	$x\sqrt[7]{1-4x^2}$	$\frac{2-arctgx}{1+x^2}$	$\frac{x^2}{\sqrt{3x^3+5}}$	$\frac{e^x}{1+2e^x}$	$\frac{\sin x/4}{\cos^2 x/4}$

Продолжение задания 1

	1.24	1.25	1.26	1.27	1.28	1.29	1.30
1	$(3-4x)^5$	$\frac{3x}{x^2+\sqrt{5}}$	$x^3\sqrt{1-3x^4}$	$(2-5x)^7$	$\frac{5}{3-8x}$	$\frac{1}{(2x-1)^2}$	$(11x+5)^3$
2	$\frac{1}{6x-1}$	$\frac{\cos 4x}{\sqrt{3\sin 4x-5}}$	$\frac{1}{5-\sqrt{3}x}$	$\frac{x}{(2x^2-1)^2}$	$(4x-7)^6$	$\frac{\sqrt[4]{x}-\ln x}{x}$	$\frac{x}{2-3x^2}$
3	$\sqrt[6]{5x-3}$	$\frac{1}{x\sqrt[5]{2-\ln x}}$	$\frac{\sin x/4}{(2\cos x/4-1)^3}$	$\frac{3x^3}{\sqrt[3]{x^4+5}}$	$\frac{5x}{\sqrt{1-7x^2}}$	$\frac{x^2}{\sqrt{5-3x^3}}$	$\frac{\cos 2x}{(1-\sin 2x)^3}$
4	$\frac{3x}{\sqrt{5-x^2}}$	$\frac{7x^3}{(2x^4-1)^5}$	$\frac{(3-ctgx)^4}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{x\sqrt{3-2\ln x}}$	$\frac{\cos 3x}{\sqrt{\sin 3x}}$	$\frac{\sin x}{(\cos x+2)^3}$	$\frac{e^{4x}}{2e^{4x}-5}$
5	$\cos x\sqrt{1+3\sin x}$	$\frac{2\sqrt{x}-5\ln x}{x}$	$\frac{\arcsin 3x}{\sqrt{1-9x^2}}$	$\sin 2x\sqrt{\cos 2x}$	$\frac{(2\ln x-1)^2}{x}$	$\frac{arctg^2 x}{1+x^2}$	$\frac{\sqrt{arcctgx}}{1+x^2}$
6	$\frac{1}{x\ln^4 x}$	$\frac{\sqrt[3]{2arcctgx-1}}{1+x^2}$	$\frac{5e^x}{(e^x-1)^6}$	$\frac{\sqrt[4]{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{e^x}{\sqrt[4]{1-5e^x}}$	$x\sqrt[5]{2x^2+1}$	$\frac{1}{x(2\ln x-1)^2}$
7	$\frac{e^x}{\sqrt[4]{5e^x-1}}$	$\frac{1}{\cos^2 x(3tgx-1)}$	$(5x-1)^6$	$\frac{x+2-\ln x}{x}$	$\frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{e^x}{3e^x+5}$	$\frac{5}{\cos^2 x\sqrt{tg^3 x}}$
8	$\frac{1}{x\sqrt{2\ln x-1}}$	$(4-7x)^3$	$\frac{\sqrt[3]{2\ln x-1}}{x}$	$\frac{e^{3x}}{e^{3x}-1}$	$\frac{\sqrt[5]{tg3x}}{\cos^2 3x}$	$(4x-1)^5$	$\frac{2x^4-\sqrt{\ln x}}{x}$
9	$\frac{3}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{x^2}{(x^3-7)^3}$	$\frac{3x}{\sqrt{1-5x^2}}$	$\frac{1}{\cos^2 x(tgx-1)^2}$	$\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}$	$\frac{\sqrt{2-3ctgx}}{\sin^2 x}$	$x^2\sqrt[5]{1-x^3}$
10	$\frac{\cos x+2ctgx}{\sin^2 x}$	$e^{2x}\sqrt{1-3e^{2x}}$	$\frac{x^3-5x}{\sqrt[4]{x}}$	$\frac{1}{\sqrt[5]{(1-3x)^2}}$	$\frac{1}{\sqrt[5]{(1-6x)^3}}$	$\frac{(x+2)^2}{x}$	$\frac{x^4}{(2x^5-1)^2}$

Задание 2

	2.1	2.1	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8
1	$ctg(4x+\sqrt{3})$	$\frac{5}{x^2+3}$	$\frac{e^{2x}}{\sqrt{9-e^{4x}}}$	$\frac{3}{\sqrt{4x^2+1}}$	$\frac{x-3x^3}{x^4+4}$	$\frac{5}{x\sqrt{9-\ln^2 x}}$	$e^{\sin 3x-1}\cos 3x$	$\frac{\cos(1-3\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$
2	$\frac{5}{\sqrt{7-x^2}}$	$\frac{1}{x\sqrt{4-3\ln^2 x}}$	$\frac{\cos x}{4\sin^2 x+1}$	$xctg(1-3x^2)$	$e^{\sin 2x}\cos 2x$	$\frac{x^3}{\sqrt{x^8-6}}$	$\frac{7}{x(2+\ln^2 x)}$	$\frac{ctg(4-3\ln x)}{x}$
3	$\frac{x^2}{\cos^2(x^3-1)}$	$e^{2x}\cos(e^{2x}-1)$	$x^2 3^{x^3-1}$	$2^{3\ln x-1}\frac{1}{x}$	$\frac{x^2}{\sqrt{5-x^6}}$	$\frac{4^{2-tgx}}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{x^2}tg\left(\frac{1}{x}+3\right)$	$\frac{7^{tg2x-1}}{\cos^2 2x}$
4	$\frac{1}{\sqrt{4x^2+3}}$	$x^3 ctg(3x^4+1)$	$\frac{1}{x^2}\cos\left(3-\frac{1}{x}\right)$	$x^2\sin(2-3x^3)$	$\frac{x}{\cos^2(3-x^2)}$	$\frac{4+3x}{x^2+8}$	$\frac{\sin(2\ln x)}{x}$	$\frac{x-3x^3}{\sqrt{1-2x^4}}$
5	$\frac{3x^5-2x^2}{x^6+5}$	$\frac{2-5x}{x^2-7}$	$\frac{x^2}{\sqrt{x^6+5}}$	$\frac{x^3}{\sqrt{5-x^8}}$	$\frac{tg(3-1/x)}{x^2}$	$x^2\cos(x^3-4)$	$\frac{x-4x^3}{x^4-7}$	$\frac{5}{x^2\sin^2\left(\frac{1}{x}-3\right)}$
6	$\frac{e^{tg2x}}{\cos^2 2x}$	$\frac{\sin(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{x\sin^2(\ln x)}$	$\frac{3-x}{5x^2+4}$	$\sin\left(\frac{x}{3}+1\right)$	$\frac{ctg(2-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{6x^2-1}}$	$\frac{\cos 3x}{1+4\sin^2 3x}$
7	$4^x\sin(4^x-3)$	$\frac{5^{ctg3x-1}}{\sin^2 3x}$	$\frac{x+2x^3}{x^4-3}$	$\frac{e^{x/2}}{e^x-9}$	$\frac{1}{x\sqrt{3\ln^2 x-1}}$	$\frac{x}{\sin^2(x^2+4)}$	$\frac{2+3ctgx}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{\sqrt{3x^2+5}}$
8	$\frac{1}{x(4\ln^2 x-1)}$	$\frac{1}{\cos^2(1-4x)}$	$tg(5x-3)$	$\frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x-4}}$	$\frac{x}{5x^4-1}$	$\frac{3}{5x^2-2}$	$e^x\cos(1+2e^x)$	$\frac{e^{x/2}}{e^x-7}$
9	$\frac{e^x}{e^{2x}+2}$	$\frac{x^2}{\sqrt{x^6-1}}$	$\frac{1}{x\sqrt{4-3\ln^2 x}}$	$\frac{1}{x^4\cos^2\frac{1}{x^3}}$	$\frac{\cos x}{\sin^2 x+2}$	$\frac{\sin x/2}{\sqrt{3-\cos^2(x/2)}}$	$\frac{3^x}{9^x+2}$	$\frac{4x^2}{3x^6+1}$
10	$\frac{1}{x^4}\cos\frac{1}{x^3}$	$\frac{2^x}{1+4^x}$	$\frac{e^{1-\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{e^{ctg2x}}{\sin^2 2x}$	$\frac{2^{3ctgx-1}}{\sin^2 x}$	$e^{2-x/5}$	$\frac{\cos x/3}{\sqrt{2-\sin^2(x/3)}}$	$\frac{1}{7x^2+1}$

Продолжение задания 2

	2.9	2.10	2.11	2.12	2.13	2.14	2.15	2.16
1	$\frac{1}{2x^2-3}$	$\sqrt{x}\sin(2\sqrt{x^3})$	$\frac{3}{\sqrt{5-2x^2}}$	$tg(\sqrt{2}x-3)$	$\frac{1}{\cos^2(1-\sqrt{2}x)}$	$xtg(5-2x^2)$	$\frac{1}{x\sqrt{2-3\ln^2 x}}$	$x\sin\frac{2x^2}{3}$
2	$\frac{ctg2x-3}{\sin^2 2x}$	$\frac{x}{5+3x^4}$	$\frac{3-\cos 4x}{\sin^2 4x}$	$x\cos(5-2x^2)$	$\frac{1}{5x^2+7}$	$\frac{2x-x^3}{x^4+7}$	$\frac{3\cos 4x}{\sqrt{\sin^2 4x+5}}$	$\frac{ctg(1-7\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$
3	$\frac{5-3x}{x^2+5}$	$\frac{tg\left(1-2/x\right)}{x^2}$	$\frac{4x-5}{7x^2+1}$	$\frac{x-2}{5x^2-3}$	$2^x\sin(2^{x+1}+3)$	$\frac{\cos(4-7\ln x)}{x}$	$\frac{e^{2tgx-3}}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{x(5+3\ln^2 x)}$
4	$2^x\sin(3-2^x)$	$3^{\sin 2x}\cos 2x$	$x^2 ctg(1+2x^3)$	$\frac{1}{x(4\ln^2 x+1)}$	$\frac{6+5x}{x^2-3}$	$\frac{\sin x}{3\cos^2 x+1}$	$\frac{1}{x^2}\cos\left(5+\frac{1}{x}\right)$	$\frac{2+3x}{5x^2+4}$
5	$\frac{1}{x(3+4\ln^2 x)}$	$\frac{x^2}{\sin^2(5-3x^3)}$	$\frac{5^{2-2arctg3x}}{1+9x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{7x^2-6}}$	$\frac{x}{\sqrt{3x^4-1}}$	$\frac{5}{\sqrt{2x^2-3}}$	$4^x ctg(1-4^x)$	$\frac{1}{\sqrt{2-7x^2}}$
6	$\frac{\sin x}{\sqrt{3-\cos^2 x}}$	$\frac{5x^2}{\sqrt{7-x^6}}$	$\sin\left(1-\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{4^x}{\sqrt{5-16^x}}$	$\frac{\cos 2x}{\sqrt{4-7\sin^2 2x}}$	$\frac{x^2}{3x^6-2}$	$\frac{x}{\sin^2 3x^2}$	$\frac{e^{\arccos 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}$
7	$\frac{e^{2arctg x/2}}{4+x^2}$	$\frac{4}{\sqrt{2x^2+5}}$	$\frac{x^2}{\sqrt{5-2x^6}}$	$\frac{2+3ctgx}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{x^2}ctg\left(3-\frac{1}{x}\right)$	$\frac{x}{\sin^2(2x^2+3)}$	$\frac{x^3-4x}{x^4-5}$	$\frac{\cos x}{\sqrt{3\sin^2 x-1}}$
8	$\frac{ctg(5-3\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$	$\frac{e^{3x}}{e^{6x}-2}$	$\frac{x^3-7x}{x^4-3}$	$\frac{6^{2+3\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{5x^2}{\sqrt{7-x^6}}$	$\frac{3}{e^{2x}(e^{-4x}+2)}$	$\frac{7}{\sqrt{3x^2+8}}$	$\frac{1}{x^3\cos^2\left(\frac{2}{x^2}\right)}$
9	$\frac{x^2}{\sqrt{2-x^6}}$	$\frac{x^3}{4x^8-1}$	$\frac{\cos x/5}{3\sin^2 x/5+1}$	$\frac{x^2}{6x^6+1}$	$\frac{3^{5-4\ln x}}{x}$	$\frac{5^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{x^2}{\sqrt{1-7x^6}}$	$\frac{4x^2}{3-x^6}$
10	$\frac{x^4}{\sqrt{5x^{10}-1}}$	$\frac{1}{x\sqrt{5-\ln^2 x}}$	$\frac{e^x}{\sqrt{5-e^{2x}}}$	$\frac{5x^3}{\sqrt{3-x^8}}$	$\frac{e^{x/6}}{e^{x/3}+5}$	$\frac{7x^4}{\sqrt{5-x^{10}}}$	$\frac{9x}{5x^4+3}$	$\frac{5x^3}{\sqrt{7x^8+3}}$

Продолжение задания 2

	2.17	2.18	2.19	2.20	2.21	2.22	2.23
1	$\sin\frac{7x}{11}$	$\frac{3x}{\sqrt{2x^4+7}}$	$\frac{4}{\sqrt{7x^2-1}}$	$\frac{\sin 2x}{\sqrt{5-\cos^2 2x}}$	$\frac{e^{arctg3x}}{1+9x^2}$	$\frac{2}{5x^2-3}$	$\frac{1}{x\sqrt{7-5\ln^2 x}}$
2	$\frac{3x}{4+5x^4}$	$\frac{\sin 5x}{\sqrt{3-2\cos^2 5x}}$	$x^2\sin(1-4x^3)$	$\frac{1}{x\sin^2(4\ln x)}$	$\frac{3x^3-x}{x^4+11}$	$\frac{1}{x\cos^2(3-\ln x)}$	$\frac{e^{3x}}{e^{6x}-2}$
3	$3^{\cos 4x}\sin 4x$	$\frac{tg(3-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$	$\frac{x}{\cos^2(3-7x^2)}$	$\frac{e^{3-tgx/2}}{\cos^2(x/2)}$	$5^x\cos(5^x-1)$	$\frac{3x^2}{\sqrt{3-x^6}}$	$\frac{1}{\sqrt{10x^2-1}}$
4	$\frac{2}{x\sin^2\ln x}$	xe^{6x^2-1}	$\frac{1}{x\sqrt{2-5\ln^2 x}}$	$\frac{3-5x}{7x^2+1}$	$\frac{x^2}{\sin^2(1-3x^3)}$	$\cos\frac{x}{2}5^{\sin\frac{x}{2}}$	$\cos(\sqrt{3}-2x)$
5	$\frac{1}{x^2}tg\left(\frac{3}{x}-1\right)$	$\frac{\sin(2-3\ln x)}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}ctg(5-\sqrt{x})$	$\frac{11x^2}{\sqrt{3x^6-1}}$	$\frac{tg(1+2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{x^3}\sin\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$	$\frac{4^{2tg3x}}{\cos^2 3x}$
6	$\frac{\cos x/3}{\sqrt{5-\sin^2(x/3)}}$	$\frac{1}{\sin^2(3+5x)}$	$\frac{2^x}{4^x-3}$	$e^{3x}tg(2e^{3x})$	$\frac{7x^2}{5-3x^6}$	$e^{-x}ctg\frac{1}{e^x}$	$\frac{x^3}{\sqrt{5-x^8}}$
7	$\frac{1}{\sqrt{9x^2-5}}$	$\frac{2-7\sin x}{\cos^2 x}$	$\frac{x^2}{\sqrt{4-3x^6}}$	$\frac{\sin(2-5\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{4x^2-1}}$	$\frac{3x-x^3}{7+x^4}$	$\frac{ctg(\sqrt[3]{x}-1)}{\sqrt[3]{x^2}}$
8	$\frac{x^3}{1-2x^8}$	$\frac{5x-2x^3}{x^4-7}$	$\frac{5^{ctg2x}}{\sin^2 2x}$	$\frac{3}{4x^2-1}$	$\frac{e^{2x}}{e^{4x}-3}$	$\frac{5^x}{\sqrt{1-25^x}}$	$\frac{1}{9+5x^2}$
9	$\frac{7x^2}{\sqrt{3-4x^6}}$	$\frac{1}{x(2+3\ln^2 x)}$	$\frac{x+3x^3}{9x^4+12}$	$\frac{x^4}{\sqrt{2-x^5}}$	$\frac{\sin x/4}{2+\cos^2(x/4)}$	$\frac{x^4}{\sqrt{3x^{10}-1}}$	$\frac{x}{\sin^2(3-2x^2)}$
10	$\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}+1}}$	$\frac{1}{3+4x^2}$	$\frac{3x^4}{x^{10}-2}$	$\frac{3^x}{\sqrt{9^x+1}}$	$\frac{x^4}{\sqrt{3-5x^{10}}}$	$\frac{3}{x(4\ln^2 x+3)}$	$\frac{5x-2x^3}{x^4-3}$

Продолжение задания 2

	2.24	2.25	2.26	2.27	2.28	2.29	2.30
1	$\frac{5^{3\ln x-1}}{x}$	$\frac{1}{3x^2+1}$	$tg(3x-4)$	$xctg(2-3x^2)$	$\frac{3}{x(5+\ln^2 x)}$	$\frac{2-\cos 3x}{\sin^2 3x}$	$\frac{\sin 2x}{\sqrt{3\cos^2 2x-1}}$
2	$x^2 tg(5-3x^3)$	$\frac{1}{x^3}\cos\left(5-\frac{1}{x^2}\right)$	$\frac{1}{x\sqrt{5-\ln^2 x}}$	$\frac{4x-x^3}{x^4+5}$	$\frac{5^{tg3x-1}}{\cos^2 3x}$	$\frac{x-5}{3x^2-1}$	$x^2\sin(4x^3+3)$
3	$\frac{e^{x/6}}{3-e^{x/3}}$	$\frac{1}{x\sin^2(7-\ln x)}$	$x^3 4^{3x^4-1}$	$\frac{3^{1-tg2x}}{\cos^2 2x}$	$\frac{2-3x}{x^2-8}$	$4^x\sin(1+4^x)$	$\frac{ctg(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}}$
4	$\frac{2-3x}{x^2+8}$	$4^x ctg(4^x-3)$	$\frac{1}{\sqrt{5x^2-1}}$	$\frac{x}{\cos^2(3x^2-1)}$	$\frac{\sin\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x^2}$	$x^2 ctg(1-x^3)$	$\frac{1}{x\sqrt{7-3\ln^2 x}}$
5	$\frac{\sin\left(\frac{1}{x}+5\right)}{x^2}$	$\frac{e^{x/4}}{\sqrt{5-3e^{x/2}}}$	$\frac{3-7x}{x^2-2}$	$\frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}$	$\frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x-5}}$	$\frac{3x^3}{4-x^8}$	$\frac{7x^2}{3x^6-4}$
6	$\frac{\sqrt{x}}{\cos^2(3-\sqrt{x^3})}$	$\frac{x-5x^3}{9x^4-7}$	$\frac{1}{e^x\sin^2(e^{-x})}$	$\sin\left(2+\frac{x}{3}\right)$	$\frac{3^x}{\sqrt{2-9^x}}$	$\frac{\sin x/2}{\sqrt{\cos^2(x/2)-5}}$	$\frac{3}{\cos^2(2-x)}$
7	$\frac{x^2}{\sqrt{x^6-2}}$	$\frac{5^{\arccos 3x}}{\sqrt{1-9x^2}}$	$2^x\sin(1-2^x)$	$\frac{e^x}{e^{2x}-3}$	$\frac{3x^2}{\sin^2(1+x^3)}$	$\frac{5}{x(\ln^2 x+4)}$	$\frac{5-3x}{2x^2+1}$
8	$\frac{x}{\sqrt{2-x^4}}$	$\frac{1}{\sqrt{8x^2-5}}$	$\frac{1}{\sqrt{x}\cos^2(\sqrt{x})}$	$\frac{\cos x/2}{\sqrt{7+\sin^2(x/2)}}$	$e^x\sin(2+e^x)$	$\frac{3^{arctgx}}{1+x^2}$	$e^x tg(e^x+1)$
9	$\frac{x^3}{3x^8-1}$	$\frac{x^2}{\sqrt{11-5x^6}}$	$\frac{\sin x}{\cos^2 x+7}$	$\frac{x^3}{\sqrt{3-x^4}}$	$\frac{tg(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{x}\cos^2(\sqrt{x})}$	$\frac{4^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}$
10	$\frac{\cos 2x}{\sin^2 2x+7}$	$\frac{\sin 5x}{3\cos^2 5x+1}$	$\frac{1}{x^3}\cos\left(2-\frac{1}{x^2}\right)$	$\frac{\sin(1-2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$	$\frac{x^3}{2-3x^8}$	$\frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}$	$\cos\left(\frac{2}{3}x\right)$

Задание 3

	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8
1	$(5x-2)e^{\frac{x}{3}}$	$(x+5)\ln x$	$\frac{1}{x\sqrt{2x+3}}$	$\frac{x}{\sqrt[3]{x+3}}$	$(4-5x)\sin 2x$	$\frac{1}{\sqrt{x}(x-2)}$	$x\sin(3-5x^2)$	$\frac{x}{\sqrt[3]{4x+5}}$
2	$\frac{1}{2+\sqrt{x+1}}$	$\sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}$	$(1-x)2^{4x}$	$(x-7)\ln x$	$\frac{x^3}{\sqrt{x-2}}$	$(x+3)\sin\frac{x}{5}$	$(27x^2+1)\,arctg3x$	$\frac{x^2}{x^6-7}$
3	$\frac{arctgx+3}{1+x^2}$	$\frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{x\sqrt{3+\ln^2 x}}$	xe^{-x^2}	$\frac{e^x}{(7-e^x)^2}$	$\frac{2-3x}{\sqrt{5-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{x-2}(x+1)}$	$(1-7x)2^{3x}$
4	$\frac{\ln x}{x^3}$	$\frac{tg\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}$	$\frac{x(1-2x^2)}{3+x^4}$	$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$	$x\cos^2 x$	$(3-4x)\ln x$	$\frac{1}{\sqrt{x}\cos^2(\sqrt{x}+1)}$	$x\sqrt{5-x}$
5	$\cos 2x\,2^{\sin 2x}$	$(x^2-1)e^{-2x}$	$\frac{x\,arctgx}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{\arccos\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}$	$arctg4x$	$x\cos(7-3x^2)$	$\frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}$	$x^2\sin(2x^3+3)$
6	$\frac{\sqrt{2+x}}{x}$	$x^2\cos(3-5x^3)$	$\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}$	$\frac{1}{\sqrt{x}(x-5)}$	$\frac{\ln x}{\sqrt[5]{x}}$	$(x-2x^2)e^{-x}$	$(4-5x)e^{2x}$	$\frac{x}{\cos^2 4x}$
7	$\frac{x}{\sqrt{x^4-3}}$	$x\,arctgx$	$\arcsin\frac{x}{2}$	$(3x-7)\cos\frac{x}{5}$	$\frac{ctg(\sqrt{x}+5)}{\sqrt{x}}$	$\frac{x}{\cos^2 x^2}$	$x^2\cos x$	$(x+5)\sin 2x$
8	$arctg\sqrt{2x-1}$	$x2^{1-x^2}$	$x^2\cos x$	$\frac{1}{tg(2x-3)}$	$\frac{x}{3+x^4}$	$\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x+3}}$	$\frac{1}{x\sqrt{3-x^2}}$	$\ln^2(4-x)$
9	$\frac{\ln(3+2x)}{3+2x}$	$x\sqrt[3]{x+2}$	$\frac{e^{2-tgx}}{\cos^2 x}$	$\arcsin 4x$	$\frac{\sqrt{x}}{x-5}$	$\frac{3^{1/x}}{x^2}$	$\frac{\sqrt{x}}{7-x}$	$(x+1)e^{x^2+2x}$
10	$x^2\cos x$	$x\sin\frac{x}{5}$	$(3x^2+1)5^{x^3+x}$	$(x^2+1)2^{4x}$	$\frac{\ln^2(x+2)}{x+2}$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2+5}}$	$\frac{x-2}{6x^2+5}$	$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

Продолжение задания 3

	3.9	3.10	3.11	3.12	3.13	3.14	3.15	3.16
1	$(2x-3)e^{2x}$	$x\sqrt{x-1}$	$x^2\cos(5-3x^3)$	$(2x-5)\sin\frac{x}{5}$	$(7x-5)2^{4x}$	$(7-3x)5^{2x}$	$\frac{\sqrt{x}}{x(x+4)}$	$\frac{x}{\sqrt[4]{x-3}}$
2	$x\cos(2x^2-7)$	$\ln(5+2x)$	$\sin\sqrt{x}$	$x3^{x^2+5}$	$\frac{1}{\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}}$	$\frac{3+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}$	$x\cos(2-4x)$	$(1-5x)\sin 4x$
3	$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$	$(7-3x)\cos 2x$	$\frac{1}{\sqrt{x}+2}$	$\frac{1}{x\sqrt{2x-3}}$	$(12x^2+1)arctg2x$	$\frac{e^{\arcsin x/2}}{\sqrt{4-x^2}}$	$\frac{2x^3-3x}{\sqrt{x^4-2}}$	$\frac{1}{(\arccos x)^5\sqrt{1-x^2}}$
4	$\frac{\sin(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}$	$\frac{x}{\sqrt{2x+1}+1}$	$\frac{2+11x}{\sqrt{6-x^2}}$	$e^{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{(5+x)\sqrt{x+1}}$	$(3x+2)\ln x$	$x^2\sin(1-4x^3)$	$x\cos(4-x^2)$
5	$\frac{x}{\cos^2 x}$	$(x+1)e^{x/4}$	$x\ln^2 x$	$\frac{2+7x}{3+2x^2}$	$x\cos(x^2+1)$	$\frac{1}{(3-x)\sqrt{1+x}}$	$(x-3)\ln x$	$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}$
6	$\frac{1}{\sqrt{x^3}+\sqrt{x}}$	$arctg\sqrt{x}$	xe^{-x^2+2}	$x\sqrt{1-x}$	$\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$	$(3x^2+1)arctgx$	$\frac{\ln^2(x-2)}{x-2}$	$\frac{2\ln x-4}{x}$
7	$(x^2+1)\sin x$	$(1+e^{3x})^2e^{3x}$	$\arcsin 2x$	$\frac{\ln x}{\sqrt{x+2}}$	$\frac{x+2}{\sqrt{3-5x^2}}$	$x^2e^{x/2}$	$\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}}$	$(1-x^2)2^x$
8	$\frac{x}{\sqrt{x+5}}$	$(x+3)\sin(x^2+6x)$	$\frac{x}{\sqrt[3]{x+1}}$	$\arccos 3x$	$\frac{\sqrt{x}}{x+2}$	$x\sin(x^2+1)$	$(x^2+1)e^{-x}$	$x\sqrt{1+x}$
9	$(x+3)2^{x^2+6x}$	$\frac{2x-5}{1+x^2}$	$(x+5)2^{3x}$	$\frac{x}{\sin^2(3x^2-1)}$	$(x+5)\sin\frac{x}{2}$	$\frac{tg(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}}$	$\arcsin 4x$	$\frac{x}{\cos^2 2x}$
10	$\frac{2+3x}{\sqrt{7-x^2}}$	$\frac{x^2}{\cos^2(1+x^3)}$	x^2e^x	$e^{-x}tg\frac{1}{e^x}$	$\frac{\sqrt{arctg\,x/2}}{4+x^2}$	$\frac{x^2}{\sqrt{5-3x^6}}$	$\frac{1}{\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}}$	$\frac{x^3}{5x^8-3}$

Продолжение задания 3

	3.17	3.18	3.19	3.20	3.21	3.22	3.23
1	$\frac{x}{\sqrt{3x^2-8}}$	$x\sqrt{3-x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}}$	$\arccos 5x$	$\cos\sqrt{x}$	$(2-x)\ln x$	$\frac{x+1}{\sqrt[3]{2-x}}$
2	$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}(5+\sqrt[3]{x})}$	$(2-4x)\sin\frac{x}{4}$	$\frac{x}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{x\sqrt{5-3x}}$	$\frac{1}{3-\sqrt{x}}$	$\frac{ctg\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}$	$arcctg\frac{x}{3}$
3	$\left(x^2+\frac{1}{3}\right)arctgx$	$\frac{3-2x}{\sqrt{7+x^2}}$	$(1-7x)\sin 4x$	$(5-x^2)e^{4x}$	$\frac{x^2}{\sqrt{5-x^6}}$	$\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$	$\frac{1}{ctg(3-2x)}$
4	$(5-2x)e^{7x}$	$arctg\sqrt{x}$	$x4^{x^2-2}$	$2^{\sqrt{x}}$	$\arcsin\frac{x}{2}$	$arctg2x$	xe^{-x^2+3}
5	$(7x+3)\ln x$	$(5-x^2)e^{-x}$	$\frac{ctg\,e^{-x}}{e^x}$	$x\sqrt[3]{3+x}$	$x^3\ln x$	$\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-5}}$	$(1-5x)\sin 2x$
6	$x^2\sin 3x$	$x\cos(1-3x^2)$	$\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}$	$\frac{1-x}{\sqrt{2-x^2}}$	xe^{3x^2+2}	$x\sin(1-2x^2)$	$\frac{3-\sqrt[3]{x}}{x}$
7	$(x+5)3^{x^2+10x}$	$\ln(3x+1)$	$\frac{3x-4x^3}{\sqrt{2-x^4}}$	$\frac{\ln^2 x}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{2-x}}$	$(3-x^2)e^{x/2}$	$\ln^2(x+5)$
8	$\frac{x}{\sin^2(x^2+1)}$	$\frac{1}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}$	$\cos\sqrt{x}$	$(x+2)\sin(x^2+4x)$	$(5x-3)e^{x/3}$	$x\sqrt[3]{2-5x}$	$\frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}$
9	$\frac{2-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{2-x}}$	$\frac{x}{1-\sqrt{2x+1}}$	$\frac{\sqrt{x}}{x+2}$	$\frac{1}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$	$\frac{x}{tg(x^2+5)}$	$(x+5)\cos 6x$	$\frac{x}{\sqrt[3]{2x-3}}$
10	$\frac{e^{\arccos 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}$	$\frac{tg2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$	$\frac{arctg\,x/5}{25+x^2}$	$\ln(1-5x)$	$\frac{\sin x}{8+3\cos^2 x}$	$\sqrt{\frac{\arccos 3x}{1-9x^2}}$	$(x+7)3^{4x}$

Продолжение задания 3

	3.24	3.25	3.26	3.27	3.28	3.29	3.30
1	$\frac{x^2}{\sqrt{4-x}}$	$(4-3x)e^{2x}$	$(1-3x)e^{x/3}$	$\frac{x}{\sqrt[3]{x-2}}$	$x\sqrt{x-3}$	$(2x-1)e^{4x}$	$\frac{x}{\sqrt{5x^2-1}}$
2	$x\sin^2 x$	$\frac{1}{\sqrt{x-2}-3}$	$\frac{1}{5+\sqrt{x+1}}$	$(x+7)\ln x$	$\cos\sqrt{x}$	$\frac{1}{x\sqrt{3x+1}}$	$(2-3x)\sin x/3$
3	$\frac{1}{\sqrt[3]{x}(3-\sqrt[3]{x})}$	$\frac{x^2}{5x^6-3}$	$\frac{arcctgx-1}{1+x^2}$	$x2^{-x^2}$	$\frac{3-7x}{\sqrt{6-x^2}}$	$(2-x)\ln x$	$(2-x^2)e^{-x}$
4	$\frac{7x}{\sqrt{2-3x^4}}$	$arctg\sqrt{x-1}$	$\frac{ctg\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-5}}$	$x\sin^2 x$	$\frac{x}{\sin^2 4x}$	$\frac{4+5x}{7-3x^2}$	$\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$
5	$(1-7x)\cos 5x$	$\frac{x}{\sin^2 5x}$	$x^2\sin 2x$	$arctg2x$	xe^{-x^2+2}	$(3x^2+1)arctgx$	$(x+5)3^{x^2+10x}$
6	$\arcsin\frac{x}{5}$	$\frac{\ln(x+5)}{x+5}$	$x\cos(1-x^2)$	$\frac{tg(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}}$	$\arccos\frac{x}{3}$	$x^2\cos x$	$\frac{1}{2-\sqrt{x}}$
7	$\frac{x}{\cos^2 4x}$	$x^2\sin x$	$\arcsin 3x$	$\frac{x}{5+x^4}$	$\frac{1}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}$	$e^{-x}ctg\frac{1}{e^x}$	$\arcsin\frac{x}{3}$
8	$(x+1)e^{x^2+2x}$	$x\cos(1-3x^2)$	$\frac{e^{2-ctgx}}{\sin^2 x}$	$(1-x^2)e^x$	$(x-4)2^x$	$\frac{\sqrt{x}}{x+9}$	$\frac{x}{tg(x^2+5)}$
9	$\frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}$	$\frac{\sqrt{3-x}}{x}$	$(x-1)\ln x$	$\frac{\sqrt{x}}{x-4}$	$x^2\cos 4x^3$	$\frac{1}{\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}}$	$\frac{\cos x}{3+\sin^2 x}$
10	$\frac{\sqrt{x}}{2-x}$	$\frac{2x-x^3}{\sqrt{1-3x^4}}$	$\frac{1}{(x-1)\sqrt{x+1}}$	$\frac{\arccos x/2}{\sqrt{4-x^2}}$	$\frac{x}{\sqrt[3]{x+4}}$	$\frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\sqrt[3]{2-x}$

Задание 4

	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8
1	$\frac{x}{2x-1}$	$\frac{1}{x^2+3x-10}$	$\frac{2x+7}{x^2-6x+10}$	$\frac{x^4}{1-x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{8-3x-x^2}}$	$\frac{1}{1-2x}$	$\frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-1)}$	$\frac{3x^2+2x-6}{x^3-x}$
2	$\frac{x^4+7x-1}{x(x^2+4)}$	$\frac{1}{4x-11}$	$\frac{x+2}{x^3-5x^2+4x}$	$\frac{2x-1}{1-3x}$	$\frac{x^3}{2-x}$	$\frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}$	$\frac{1}{5x-3}$	$\frac{x^2-x}{2x^2+1}$
3	$\frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}-1}$	$\frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2}$	$\frac{2x^2-3}{2x^2+4}$	$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}-3x}$	$\frac{4-3x}{3x^2+8x}$	$\frac{1}{\sqrt{8-3x-x^2}}$	$\frac{1}{7x-\sqrt{2}}$
4	$\frac{x^2}{x^3+1}$	$\frac{1}{1+\sqrt[3]{x-2}}$	$\frac{x^4}{x^2-9}$	$\frac{4x+1}{2x^3+x^2-x}$	$\frac{1}{x^2+5x}$	$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}-1}$	$\frac{x^5+x^4-8}{x^2-4x}$	$\frac{x}{\sqrt{5+x-x^2}}$
5	$\frac{2x+7}{(x-1)(x-2)}$	$\frac{1-x}{1+x}$	$\frac{1}{3-2\sqrt{x-1}}$	$\frac{1}{5-8x}$	$\frac{3x^3-2}{x^3-5x^2+4x}$	$\frac{x}{3-4x^2+8x}$	$\frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}$	$\frac{8x-3}{3x^2+18x+52}$
6	$\frac{5x-7}{4x^3+8x^2}$	$\frac{x^3}{x^2-1}$	$\frac{3}{\sqrt{1-3x+x^2}}$	$\frac{7x-11}{5x^2-4x-1}$	$\frac{5x-1}{x^2-2x+5}$	$\frac{x^5}{x^2-16}$	$\frac{1}{\sqrt{x}(x+2)}$	$\frac{x^5+x^4+8}{x^3-4x^2}$
7	$\frac{13}{\sqrt{1-5x-x^2}}$	$\frac{3}{\sqrt{4x^2-x-1}}$	$\frac{1}{4-13x}$	$\frac{3}{\sqrt{x^2+3x-4}}$	$\frac{x+5}{x^4-1}$	$\frac{12}{\sqrt{1-5x-x^2}}$	$\frac{2x+1}{x^3+3x}$	$\frac{\sqrt{x-2}}{4+x}$
8	$\frac{x^4-7}{x+4}$	$\frac{x^4}{2x+3}$	$\frac{x^3}{3x-1}$	$\frac{x^5-1}{x^3+x}$	$\frac{7}{6x^2+5x-1}$	$\frac{x^3}{3x-4}$	$\frac{7-5x}{4x^2-8x+13}$	$\frac{x+7}{x^2+10x+9}$
9	$\frac{2-7x}{x^2-2x+1}$	$\frac{4-7x}{x^2-4x+1}$	$\frac{2x-7}{x^3+4x^2}$	$\frac{x+3}{x^2-7x+6}$	$\frac{5x-8}{x^3+4x^2+4x}$	$\frac{7-3x}{2x+1}$	$\frac{x^4-1}{x+5}$	$\frac{2x+5}{x^3+3x}$
10	$\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$	$\frac{x^3}{\sqrt{3-2x^8}}$	$x\cdot\sqrt{4-3x^2}$	$\frac{7x^4}{(x^5-2)^3}$	$\frac{\sqrt{2-x}}{x+4}$	$\frac{7x-2}{\sqrt{9x^2-16}}$	$\frac{7x-3}{\sqrt{x^2-9}}$	$\frac{x^2}{\sqrt{5-x^6}}$

Продолжение задания 4

	4.9	4.10	4.11	4.12	4.13	4.14	4.15	4.16
1	$\frac{1}{4x-3}$	$\frac{1}{x^2-2x}$	$\frac{x-3}{3x^2+6x+1}$	$\frac{2x-7}{4x^2+8x-2}$	$\frac{x^6}{x^3+4x}$	$\frac{\sqrt{x}}{2-x\sqrt{x}}$	$\frac{1}{3x-x^2}$	$\frac{2x^2-5x+1}{x^3+2x^2+x}$
2	$\frac{1}{(x+5)(x-1)}$	$\frac{x^4+4}{x^3-3x^2+2x}$	$\frac{1}{4+5x}$	$\frac{5-4x}{\sqrt{4-9x^2}}$	$\frac{5x+2}{x^2+2x+10}$	$\frac{7x-15}{x^2-2x+15}$	$\frac{1}{4x-3}$	$\frac{1-x}{\sqrt{x^2-2}}$
3	$\frac{x^4}{x+2}$	$\frac{x+5}{\sqrt{5+2x-x^2}}$	$\frac{x^2+2}{x^2+x}$	$\frac{x-5}{4-3x}$	$\frac{3}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$	$\frac{x-2}{x^3+2x^2}$	$\frac{x-2}{x^3-2x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{5-6x-x^2}}$
4	$\frac{x+5}{x^3-2x^2+x}$	$\frac{x^2+1}{x^2-1}$	$\frac{x}{(x-2)(x-3)}$	$\frac{1}{7-\sqrt{3}x}$	$\frac{1}{1-3x}$	$\frac{1}{\sqrt{3x^2-4x+1}}$	$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}$	$\frac{1}{(x-4)(x+1)}$
5	$\frac{3x-1}{2x^2+6x+5}$	$\frac{6x+5}{2x^2+8x+1}$	$\frac{x^4-1}{x^3+x^2}$	$\frac{x^2+12}{x(x^2-9)}$	$\frac{4-3x}{\sqrt{5-7x^2}}$	$\frac{1}{1+2x}$	$\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$	$\frac{1}{3-\sqrt{2x}}$
6	$\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+4}}$	$\frac{x^3+3x}{x-4}$	$\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt[3]{x}-2}$	$\frac{x^3+4x-1}{x^3+3x}$	$\frac{3+x}{3-2x}$	$\frac{x}{(x+1)(x^2+1)}$	$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}$	$\frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-2}$
7	$\frac{x^2-3}{x^3+4x^2}$	$\frac{1}{7-3x}$	$\frac{x^4+3x-1}{x+1}$	$\frac{1}{\sqrt{8+2x-x^2}}$	$\frac{x^3}{\sqrt{x-2}}$	$\frac{x^3+1}{x^2+4x}$	$\frac{2x-5}{\sqrt{9x^2-1}}$	$\frac{x^4}{1-2x^2}$
8	$\frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}$	$\frac{\sqrt{x}}{x^2(x-1)}$	$\frac{1-4x}{\sqrt{x^2-2x+4}}$	$\frac{1}{x\cdot\sqrt{3-2x}}$	$\frac{x^4-1}{x+5}$	$\frac{x^3}{x+2}$	$\frac{x^2+2x}{x^2+1}$	$\frac{x^2-5x+1}{x^2-5x+6}$
9	$x\sqrt[6]{3-2x^2}$	$\frac{2^{3\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{x-5}{x^3-5x^2+4x}$	$\frac{1}{(2x-1)(x+5)}$	$\frac{5}{(x-1)(3x+2)}$	$\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}$	$\frac{7x+5}{2x^2-8x+1}$	$\frac{3x+1}{x^2+12x+1}$
10	$\frac{\sqrt{2-x}}{x+5}$	$\frac{x+3}{x(x^2+5)}$	$\frac{x^2+x+3}{x^3+7x}$	$\frac{x^4+3}{x^3+2x^2}$	$\frac{x-1}{x^2+8x+7}$	$\frac{x+5}{x^3+3x}$	$\frac{3x-7}{x(x^2+1)}$	$\frac{7x^2+3x+1}{x^3+5x}$

Продолжение задания 4

	4.17	4.18	4.19	4.20	4.21	4.22	4.23
1	$\frac{x^2+1}{x^3-x}$	$\frac{1}{(x-3)(x+2)}$	$\frac{1}{\sqrt{3}-4x}$	$\frac{x+5}{x^2-8x+1}$	$\frac{3x-8}{x^2+2x-3}$	$\frac{x^2-4x}{1-x^2}$	$\frac{7}{3+5x}$
2	$\frac{2x-3}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{x^3}{x+1}$	$\frac{x^5-6}{x^2-3x}$	$\frac{1}{6-5x}$	$\frac{5-4x}{\sqrt{25-4x^2}}$	$\frac{1}{3-5x}$	$\frac{1}{x\sqrt{x-1}}$
3	$\frac{1}{8-3x}$	$\frac{x-1}{x^2-4x+8}$	$\frac{x+3}{\sqrt{3-2x-x^2}}$	$\frac{x^3-2}{x^3-4x}$	$\frac{x+2}{3-5x}$	$\frac{x^2-3}{x(x-5)^2}$	$\frac{4x-3}{5-8x+x^2}$
4	$\frac{5-2x}{3x^2-6x+4}$	$\frac{1}{7x-2}$	$\frac{x^2+2x}{4x^2+1}$	$\frac{x-2}{x^2-5x-6}$	$\frac{1}{\sqrt{7}-4x}$	$\frac{x^3}{3x-1}$	$\frac{5}{\sqrt{8x^2+32x+1}}$
5	$\frac{1}{\sqrt{x^2-9x+3}}$	$\frac{1}{\sqrt{6x^2-x-1}}$	$\frac{x}{x^2-4x+1}$	$\frac{x^5+2}{x^3+x}$	$\frac{x^2+9}{x(x^2-4)}$	$\frac{1}{\sqrt{x-2+4x}}$	$\frac{x^5-3}{x^3+3x}$
6	$\frac{x+5}{2x-3}$	$\frac{x^5+5x-3}{x^3+3x}$	$\frac{\sqrt{x}}{x-2}$	$\frac{3x-1}{\sqrt{3-2x-x^2}}$	$\frac{x^4+2x+1}{x^3+3x}$	$\frac{3}{\sqrt{4x^2-3x+5}}$	$\frac{x-1}{4x^3+x^2}$
7	$\frac{x^4}{x^2-1}$	$\frac{\sqrt{x+3}}{x-5}$	$\frac{1}{x^3+4x}$	$\frac{2-\sqrt{x}}{3\sqrt{x}-5}$	$\frac{2}{\sqrt{5-6x+9x^2}}$	$\frac{3x-2x^3}{\sqrt{1-4x^4}}$	$\frac{4+3x}{9x^2+1}$
8	$\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3}$	$\frac{3x-8}{x^3-4x^2}$	$\frac{2x-3}{x^2+6x+4}$	$\frac{x^4}{2x+1}$	$\frac{1}{(x-1)\sqrt{2x-3}}$	$\frac{x^6+3x^2-1}{x^3+4x}$	$\frac{3+4x^2}{x^2+16x}$
9	$\frac{3x+4}{x^2+4x+3}$	$\frac{7x-11}{\sqrt{16-9x^2}}$	$\frac{x^3}{5x-1}$	$\frac{7x+5}{x^3+4x^2+4x}$	$\frac{5x-4}{7+4x-x^2}$	$\frac{9x+8}{x^2+7x+6}$	$\frac{x+4}{x^2-x-6}$
10	$\frac{x^2+7x-5}{x^4+2x^2}$	$\frac{3x-5}{1-2x}$	$\frac{3-7x}{x^2-2x+1}$	$\frac{5x+3}{9x^2-16}$	$\frac{x^5}{x+3}$	$\frac{x+7}{2x^2+8x+11}$	$\frac{x^4+x^2+1}{2x-1}$

Продолжение задания 4

	4.24	4.25	4.26	4.27	4.28	4.29	4.30
1	$\frac{5x-1}{x^2-6x-8}$	$\frac{3}{\sqrt{8x^2+6x+1}}$	$\frac{x}{5x-2}$	$\frac{x^3}{1-x}$	$\frac{2x-1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{x^2-2x}{1+x^2}$	$\frac{x^2}{(x-1)^2(x+2)}$
2	$\frac{1}{1-\sqrt{2}x}$	$\frac{x^3+1}{2x^3-x^2}$	$\frac{3}{2x+1}$	$\frac{3x+1}{1-2x}$	$\frac{x^4-3}{x^2+2x}$	$\frac{1}{x\cdot\sqrt{x-2}}$	$\frac{x^2-x}{x^2+1}$
3	$\frac{12}{\sqrt{7-4x-2x^2}}$	$\frac{x^5}{x+3}$	$\frac{x^3+2x-1}{x(x^2+4)}$	$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$	$\frac{4-7x}{x^2+16x+4}$	$\frac{4}{\sqrt{5-4x-2x^2}}$	$\frac{2}{\sqrt{x^2-3x+5}}$
4	$\frac{x^4+3}{x^2+2x}$	$\frac{1}{3-\sqrt{x-1}}$	$\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$	$\frac{2x+3}{x^3-3x^2+2x}$	$\frac{x-5}{5x+1}$	$\frac{x^3}{2x+1}$	$\frac{x^4+x^2-1}{x^2-2x}$
5	$\frac{1}{(3+x)\sqrt{x-1}}$	$\frac{x^3}{9x^4+5}$	$\frac{1}{1+\sqrt[3]{x-1}}$	$\frac{x+4}{x^2+2x+8}$	$\frac{3}{\sqrt{x^2+4x-1}}$	$\frac{x^5-3}{x^3+4x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$
6	$\frac{x^2+2}{9x^2-1}$	$\frac{1}{5-4x-x^2}$	$\frac{x^4}{x^2+1}$	$\frac{4}{\sqrt{3-4x-x^2}}$	$\frac{\sqrt{x}}{x+3}$	$\frac{x^2-1}{9x^2-4}$	$\frac{3x-1}{x^3-5x^2}$
7	$\frac{x}{16+9x^4}$	$\frac{1}{3x-1}$	$\frac{2}{\sqrt{1-2x+x^2}}$	$\frac{2x-1}{\sqrt{16x^2-9}}$	$\frac{1}{x^3+9x^2}$	$\frac{1}{5x+7}$	$\frac{2-4x}{x^2-8x+1}$
8	$\frac{x^3}{4x+1}$	$\frac{x^4+3x^2+5}{x^3-9x}$	$\frac{2-3x}{x^2-4x+1}$	$\frac{x^3-1}{x^3+2x}$	$\frac{x+2}{x(x^2+1)}$	$\frac{8x+5}{x^2+7x+6}$	$\frac{2x+3}{x^3+3x}$
9	$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)}$	$\frac{5x+7}{4x^2+8x+5}$	$\frac{x+5}{x^3+4x^2}$	$\frac{5}{3x-1}$	$\frac{x^3}{x+5}$	$\frac{x}{(x+2)^2(x-1)}$	$\frac{7x-1}{\sqrt{9-x^2}}$
10	$\frac{3x+10}{x^2+2x+6}$	$\frac{x-2}{(x-1)^2(x+2)}$	$\frac{x-1}{x^3-6x^2+9x}$	$\frac{4x+1}{x^3+4x^2}$	$\frac{5x+3}{x^2-9}$	$\frac{x+7}{x^2+8x+11}$	$\frac{4x-1}{1+2x}$

Задание 5

	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8
1	$\sin^2 3x$	$(1+\cos 2x)^2$	$(1-\sin x)^2$	$(1+3\cos 2x)^2$	$\sin^3 4x\cos^5 4x$	$\sin^3 2x\cos^2 2x$	$\frac{\sin^3 x}{\cos^6 x}$	$\frac{\sin^3 x/2}{\cos^4 x/2}$
2	$\sin 2x\cos\frac{x}{5}$	$\sin\frac{3x}{2}\sin 3x$	$\cos 2x\sin\frac{x}{3}$	$ctg^6 x$	$\frac{1}{tgx+1}$	$\frac{1}{\cos x/2}$	$\cos 3x\cos\frac{x}{5}$	$\sin x\cos 4x$
3	$\frac{1}{\sin x+\cos x}$	$tg^5 x$	$\frac{1}{\sin 2x}$	$\cos^2 3x\sin^3 3x$	$\frac{3-\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+x}$	$\cos x\cos 3x$	$\frac{1}{1+\sin 2x}$	$\frac{1+tgx}{1-tgx}$
4	$\frac{1}{3-ctgx}$	$\sin^3 4x$	$\frac{3x-2}{\sqrt{7x^2-1}}$	$3^{\sqrt{x+1}}$	$\frac{1}{4\cos 2x+\sin 2x}$	$\frac{\sin x}{\sqrt{3\cos^2 x-1}}$	$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$	$\frac{\cos 2x}{1+\sin^2 2x}$
5	$\frac{\sin 2x}{3-\cos 2x}$	$\frac{1}{2\cos x-\sin x}$	$\frac{1}{tgx-3}$	$\frac{4}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$	$\frac{\cos x}{(5-3\sin x)^3}$	$\frac{x-2}{x\sqrt{x+1}}$	$\frac{1}{ctg 2x}$	$\frac{1-\sqrt[3]{5x}}{\sqrt{5x}}$
6	$\frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}$	$\cos\frac{x}{2}\sqrt{1+\sin\frac{x}{2}}$	$\cos\sqrt{x}$	$\frac{5-tg^2 x}{\cos^2 x}$	$\sin^3\frac{x}{5}$	$\frac{1}{tgx}$	$(1+5\cos x)^2$	$\arcsin\sqrt{x}$
7	$\frac{x}{\sqrt{2x+1}+1}$	$\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}-1}$	$\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}$	$\cos 5x\cos\frac{x}{4}$	$\sin^2 x\cos^2 x$	$(1+3\cos x)^2$	$\frac{tg\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}$	$\frac{1}{2\sin x+3\cos x}$
8	$\cos^5 5x$	$\frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin x}}$	$\frac{\cos 2x}{\sqrt[3]{\sin^2 2x}}$	$\frac{1}{\cos 3x}$	$5^{\sqrt{x-3}}$	$e^{\sqrt{x-1}}$	$\ln\sqrt{x}$	$\sin^4 x$
9	$\frac{3^{2tgx-1}}{\cos^2 x}$	$x^2 tg(2x^3-5)$	$\cos^3 7x$	$\frac{\sin^3 x/2}{\sqrt[4]{\cos^3 x/2}}$	$\sin 3x\sin 4x$	$\sin^5 3x$	$\cos^3 4x$	$\frac{(1+tg3x)^2}{\cos^2 3x}$
10	$e^{\sqrt{x}}$	$\frac{x-2}{\sqrt{4-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{x}+1}$	$\sin^5 2x$	$\frac{\cos 2x}{\sqrt[7]{\sin^3 2x}}$	$\frac{x^2}{\cos^2(1-x^3)}$	$\frac{x^3}{\sqrt{8-3x^8}}$	$\cos^3\frac{x}{7}$

Продолжение задания 5

	5.9	5.10	5.11	5.12	5.13	5.14	5.15	5.16
1	$\frac{\sin 2x}{\cos^2 x}$	$\sin 3x \cos\frac{x}{2}$	$tg^3 x$	$\sin^2 5x$	$\frac{1}{2\cos x - \sin x - 1}$	$\cos 4x \cos\frac{x}{2}$	$\sin 9x \sin(3x+1)$	$x^2 \cos(4-3x^3)$
2	$\frac{\sqrt{tg3x}}{\cos^2 3x}$	$\cos^5 x\sqrt[4]{\sin x}$	$\cos 3x\, 2^{\sin 3x}$	$\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}$	$\sin^2 3x \sin 6x$	$\frac{1}{tg^3 x}$	$\frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}$	$\sin x \cos(2x+5)$
3	$\cos 7x \cos\frac{x}{3}$	$x^2 \cos(3-x^3)$	$\cos^5 x \sin^2 x$	$x^2 tg(1-2x^3)$	$ctg^3 x$	$\frac{\sqrt{x}-1}{x+3\sqrt{x}}$	$\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$	$\sin^3 2x \cos^3 2x$
4	$\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}$	$ctg^2 x$	$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}$	$\frac{1}{2\sin x + \cos x}$	$\cos x \sin\frac{x}{8}$	$\frac{e^{\sin x}\cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x}$	$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}-1}$	$\frac{1}{5+4\sin 3x}$
5	$tg^4 x$	$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}}$	$\sin x \cos\frac{x}{2}$	$x\cos 2x$	$\frac{\sin\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}$	$\sin^2(2x-1)$	$tg^2\frac{x}{8}$	$tg^2(1-3x)$
6	$\frac{\sin^3 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$	$\sin^3\frac{3x}{2}$	$\frac{1}{\sin 4x}$	$\frac{1}{\sqrt{x-1}+3}$	$\frac{\cos^3 x}{\sin x}$	$\sin^2 x \cos^5 x$	$\frac{1}{5-4\sin x+3\cos x}$	$\frac{1}{2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$
7	$(2\sin x - 1)^2$	$\frac{7}{3\sin x + \cos x}$	$\cos^2\frac{x}{3}$	$\frac{1}{5+tgx}$	$\frac{x-3}{\sqrt{x}+1}$	$\frac{1}{1+\sin x+\cos x}$	$\sqrt{x}\ln x$	$\cos^5 2x$
8	$\cos^3\frac{x}{3}$	$\frac{1}{\cos^4 x}$	$\frac{\cos 7x}{\sqrt[6]{\sin^5 7x}}$	$\sin^5 2x$	$\left(1-3\cos\frac{x}{2}\right)^2$	$x\sin 4x$	$(1-4\cos x)^2$	$(3\sin x+2)^2$
9	$\frac{1}{\sin x - \cos x}$	$arctg\sqrt{2x-1}$	$\frac{x}{\cos^2 x}$	$\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}$	$x\cos x$	$\cos^5 3x$	$\sin^3 4x$	$\ln\sqrt{x+2}$
10	$e^{\sqrt{x+1}}$	$\sin 4x\, e^{\sin^2 2x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$	$\frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{4^{2ctgx}}{\sin^2 x}$	$\frac{x}{x^4-1}$	$\frac{x^3}{5+8x^8}$	$\frac{1}{5\sin x - 3\cos x}$

Продолжение задания 5

	5.17	5.18	5.19	5.20	5.21	5.22	5.23
1	$\sin(4x+1)\cos 5x$	$\cos 7x \cos\frac{x}{3}$	$\frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}$	$\cos x \sin(7x-1)$	$\cos 3x\, 5^{\sin 3x}$	$tg^2(1-2x)$	$\frac{1}{4-tgx}$
2	$\frac{1}{2tgx-1}$	$\frac{\cos 2x}{\sqrt{3-5\sin 2x}}$	$\frac{1}{1-\sin x}$	$\cos^4 x$	$\sin^3\frac{x}{9}$	$\frac{5^{tgx}}{\cos^2 x}$	$\sin\frac{x}{5}\cos 3x$
3	$\frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$	$\frac{1}{3tgx-1}$	$\frac{x^4}{\sqrt{x^{10}-3}}$	$\frac{1}{3tgx+2}$	$\frac{x}{(x-4)\sqrt{x+2}}$	$\sin 4x \sin 2x$	$\sin^2 x \cos^5 x$
4	$\cos^2(3x+5)$	$\sqrt{\sin x}\cos^3 x$	$\frac{\cos 2x}{\sqrt{4-3\sin 2x}}$	$\sin x\sqrt{5-\cos x}$	$\frac{1}{2+\sin x}$	$\ln 2x$	$\frac{tg\frac{1}{x}}{x^2}$
5	$\frac{1}{\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}}$	$\sin^2\frac{x}{8}$	$\sin 2x \cos 3x$	$\frac{x}{4-\sqrt{x}}$	$\frac{2+tg^2 x}{\cos^2 x}$	$\cos^5\frac{x}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{x}(x+8)}$
6	$\sin^5 7x$	$\frac{\sqrt{ctgx+3}}{\sin^2 x}$	$\frac{x}{\sqrt{x-2}-2}$	$\frac{1}{1+2\cos x}$	$\cos 7x \cos x$	$\sin^4 x \cos^4 x$	$\frac{1}{1-\sin x-\cos x}$
7	$\frac{1}{\sin x + 5\cos x}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{1+3x}-1}$	$tg^3 3x$	$\arcsin\sqrt{x}$	$\frac{x^3}{\sin^2(3x^4-1)}$	$\frac{3}{\sin x - 2\cos x + 1}$	$\cos^7 2x$
8	$\frac{\sin\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}$	$\frac{2}{3\cos x - 7\sin x}$	$\frac{x}{\sin^2 x}$	$\sin 2x\sqrt[4]{\cos 2x}$	$\cos^2\frac{3x}{5}$	$\sin^2 3x \cos^3 3x$	$\frac{2x-x^3}{x^4+16}$
9	$\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cos^5 11x$	$\sin^2\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}$	$\frac{x^2}{\sqrt{3-5x^3}}$	$\frac{1}{1+tgx}$	$\frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}$	$\sin^4 x$
10	$\frac{x+x^3}{1+x^4}$	$e^{\sqrt{2x-1}}$	$\cos^3 x$	$\sin^3\frac{x}{7}$	$\frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos^7 x}}$	$\frac{x^3}{\sqrt{3+x^8}}$	$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Продолжение задания 5

	5.24	5.25	5.26	5.27	5.28	5.29	5.30
1	$tg^3 5x$	$\cos 9x \sin 4x$	$\frac{\sqrt{tg2x}}{\cos^2 2x}$	$\cos^2 3x$	$(1+\cos 3x)^2$	$\cos^3 x \sin^2 x$	$\frac{1}{4-tgx}$
2	$\frac{\sin 3x}{\sqrt{\cos 3x}}$	$\frac{\cos 2x}{\sqrt[5]{\sin 2x}}$	$\cos^5 x \sqrt[4]{\sin x}$	$\sin^2 x \sin 2x$	$\sin 5x \sin x$	$\cos 2x \cos\frac{x}{3}$	$\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$
3	$\frac{x}{\sqrt[4]{x+2}}$	$\frac{1}{2+tgx}$	$ctg^2 x$	$\frac{\sqrt{x}-1}{x+3\sqrt{x}}$	$ctg^3 x$	$\frac{1-tgx}{1+tgx}$	$\sin^2 x \cos^5 x$
4	$\sin^5\frac{x}{8}$	$x^2 tg(3-x^3)$	$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}$	$\cos x \sin\frac{x}{8}$	$\frac{2x+3}{\sqrt{4x^2-1}}$	$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$	$x^2 tg(3-x^3)$
5	$\frac{x-3x^3}{\sqrt{2x^4+5}}$	$\frac{2+\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}}$	$\cos x \cos 5x$	xe^{4x}	$\frac{1}{2\cos x+\sin x}$	$\arccos\sqrt{x}$	$\frac{x+3x^3}{\sqrt{x^4+5}}$
6	$\cos 2x \sin x$	$\frac{x^3-2x}{\sqrt{4-x^4}}$	$(\sin x-2)^2$	$\frac{1}{2+ctgx}$	$\frac{x}{\sqrt{2x-1}-1}$	$\frac{4}{2\sin x+3\cos x}$	$\sin x \cos 2x$
7	$(2+\cos x)^2$	$x2^x$	$e^{\sqrt{x+3}}$	$\frac{1}{4+5\sin 3x}$	$\frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}$	$\sin^4 x$	$(2+\cos x)^2$
8	$\frac{1}{4+3\cos 2x}$	$(1-3\sin x)^2$	$\frac{2}{4\sin x+\cos x}$	$\sin^3 4x$	$x^2 tg2x^3$	$\cos^5 2x$	$\frac{2}{\sin x-2\cos x+1}$
9	$\frac{ctg\frac{1}{x^3}}{x^4}$	$\cos^3\frac{x}{9}$	$\frac{1}{\cos^4 x}$	$tg^2\frac{x}{2}$	$e^{\sqrt{x-4}}$	$\frac{x^2}{\cos^2(1-x^3)}$	$\ln(x+2)$
10	$e^{\sqrt{x-5}}$	$\frac{2}{4\sin x-3\cos x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$	$\frac{x^3}{x^8+4}$	$\frac{1}{\cos 2x}$	$\frac{ctg\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}$	$\frac{x}{4-\sqrt{x}}$

Составители: Н.В. Кшнякина, М.Ю. Хлебникова.

Неопределенный интеграл

Методические указания

Редактор Л.И. Глезерова
Технический редактор А.И. Непогодина
Корректор Е.М. Фоменкова

Подписано в печать 29.08.05. Формат 60x84 1/16
Бумага офсетная. Печать оперативная.
Уч.-изд. л. 3,0 Усл. печ.л. 3,1. Тираж 350 экз.

Самарский архитектурно-строительный университет
443001 Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

Отпечатано в типографии ООО "СамЛЮКС"
Тел.: (846) 310-86-30