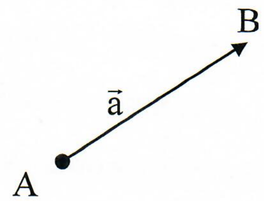
ЛЕКЦИЯ № 3

Тема. Векторы. Линейные операции над векторами, их свойства. Базис в пространстве, орты, декартова система координат.

1. Векторы

Выберем в пространстве две упорядоченные точки A и B.



Соединим их отрезком прямой AB и направим его от A к B. Этот направленный отрезок и называется **вектором.**

A - начальная точка (начало вектора)

B - конечная точка (конец вектора)

Обозначения: $\overrightarrow{AB}, \vec{a}$

Определение: Если начало и конец вектора совпадают, получаем *нулевой* вектор $|\vec{0}|$. Направление нулевого вектора, по определению, является произвольным.

Определение: Расстояние между точками A и B называется *модулем* (длиной) вектора и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$.

Модуль $|\vec{0}| = 0$.

Определение: Несколько векторов называются *коллинеарными*, если все они расположены на прямых, параллельных одной и той же прямой.

Записывается коллинеарность $\vec{a}$ и $\vec{b}$ так - $\vec{a} \parallel \vec{b}$

В случае если коллинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют одно и тоже направление, то они называются *сонаправленными* $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, если вектора имеют разные направления, то *противоположно направленные* $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Определение: Несколько векторов называются *компланарными*, если существует плоскость, параллельная всем прямым, на которых эти векторы расположены.

Замечание: Для всякого $\vec{a}$ векторы $\vec{a}$, $\vec{0}$ - коллинеарны, а для всяких $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{0}$ - компланарны (по определению).

Определение: Два вектора называются *равными*, если они имеют равные модули и одинаково направлены.

$$\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \end{cases}.$$

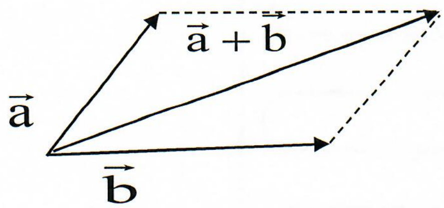
Определение: вектор $\vec{a}$ называется *единичным* вектором когда его модуль равен единице.

2. Линейные операции над векторами.

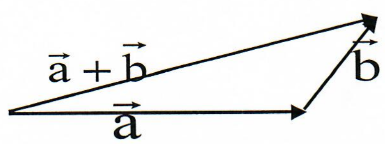
1. Сложение векторов

Сумма векторов определяется по *правилу параллелограмма* или по *правилу треугольника*.

- Назовем *суммой двух векторов (с общей начальной точкой)* новый вектор, являющийся диагональю параллелограмма, построенного на двух слагаемых векторах.



- Чтобы сложить два вектора, достаточно с концом первого вектора $\vec{a}$ путем параллельного переноса совместить начало второго вектора $\vec{b}$. Тогда вектор $\vec{a} + \vec{b}$, будет иметь своим началом начало первого вектора ($\vec{a}$) и концом – конец второго вектора ($\vec{b}$).



2. <u>Произведение вектора на действительное число</u>

Произведением вектора на действительное число $\beta \neq 0$ называется вектор $\overrightarrow{\beta a}$ коллинеарный данному (*сонаправлен*, если число положительное, *противоположно направлен*, если число отрицательное), а его модуль равен модулю данного вектора, умноженному на модуль числа.

1) вектор $\overrightarrow{\beta a}$ сонаправлен с $\vec{a}$ при $\beta > 0$ и противоположно направлен при $\beta < 0$ ($0\vec{a} = \vec{0}$),

2) $\left|\beta \cdot \overrightarrow{a}\right| = |\beta| \cdot \left|\overrightarrow{a}\right|$.

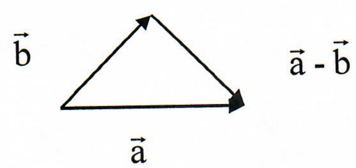
т.о. вектор $\vec{a}$ при умножении на $\beta > 0$ «вытягивается» в β раз вдоль прямой, на которой он расположен, а при умножении на $\beta < 0$, «вытягивается» в $|\beta|$ раз и изменяет свое направление на противоположное

Вектор $(-1)\ \vec{a} = -\vec{a}$ называется *противоположным* по отношению к вектору $\vec{a}$. Очевидно, что

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

Выражение: $\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$ называется разностью векторов

Разность векторов можно найти по правилу:



Для введенных операций сложения векторов и умножения на число справедливы обычные законы алгебры, т.е. эти операции, обладают теми же свойствами, что и алгебраические операции над действительными числами.

1c) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - коммутативность

2c) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ - ассоциативность

3c) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ - дистрибутивность числового множителя

4c) $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$

3. Базис и координаты вектора

Применяя введенные операции, можно составлять суммы векторов, умноженных на числа:

$$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \ldots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{a_n} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \overrightarrow{a_i}, \quad \alpha_i \in R \tag{1}$$

Такое выражение называется *линейной комбинацией* векторов $\vec{a}_i$, при этом α_i – коэффициенты линейной комбинации.

Нетрудно доказать следующие свойства линейных комбинаций:

1c) если $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2} \ldots \overrightarrow{a_n}$ – коллинеарные векторы, то любая их линейная комбинация им коллинеарна.

2c) если $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2} \ldots \overrightarrow{a_n}$ – компланарные векторы, то любая их линейная комбинация им компланарна.

Если некоторый вектор представлен в виде линейной комбинации каких-либо векторов, то говорят, что он разложен по этим векторам.

Эти соображения позволяют ввести следующие важные понятия:

Определение: *Базисом в пространстве* называют любые три упорядоченных *некомпланарных* вектора. При этом любой вектор пространства является их линейной комбинацией.

Пусть, например, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ - базис в пространстве, тогда любой вектор в пространстве может быть разложен по этому базису

$$\vec{a} = \alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} + \alpha_3 \overrightarrow{a_3}$$

Числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – называется координатами вектора в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

Записывают: $\vec{a} = \left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right)$.

Определение: *Базисом на плоскости* называют любые два упорядоченных *неколлинеарных* вектора. При этом каждый третий вектор плоскости является линейной комбинацией базисных векторов

$$\vec{a} = \alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2}$$

$$\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$$

Определение: *Базисом на прямой* называют любой ненулевой вектор на этой прямой.

$$\vec{a} = \alpha \vec{a}\ , \ \ \vec{a} = (\alpha).$$

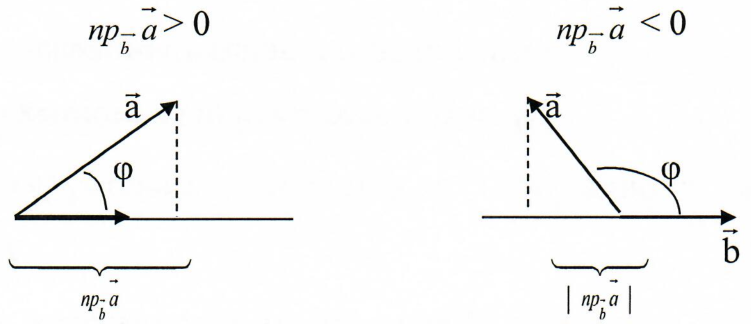
4. Проекция вектора на вектор. Разложение вектора в ортогональном базисе. Направляющие косинусы вектора.

Определение: *Проекцией* вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется число

$np_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. (1)

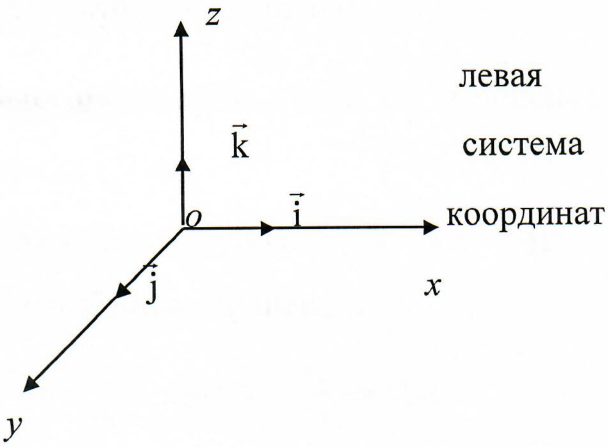
Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые векторы. Отложим их от одной точки. Угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначим через φ.

Возможны два случая: 1) проекция не отрицательная, 2) проекция отрицательная.



Выберем в пространстве точку О и возьмем упорядоченную тройку ортогональных единичных векторов ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$). Они образуют базис в пространстве.

Определение: Совокупность точки О и базиса ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) называется *ортогональной декартовой системой координат*. Точка О – *начало координат.* Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов – *оси координат.* Плоскости, проходящие через оси координат – *координатные плоскости.*



Выберем в пространстве произвольную точку М.   Соединим её с началом координат вектором $\vec{OM}$. Его называют *радиус - вектором* точки М.

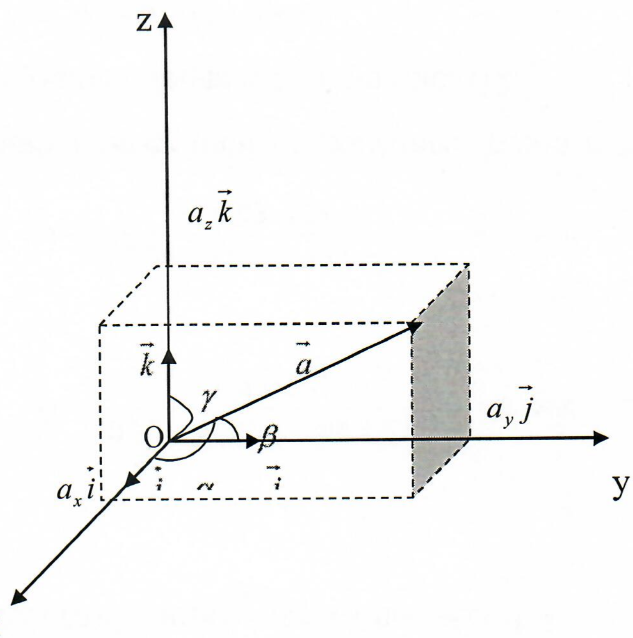
Вектор $\vec{OM}$ может быть разложен в базисе ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$)

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{r} = (x,y,z)$$

Координаты вектора $\vec{r}$ называются и координатами точки М. Очевидно эти координаты точки М и её радиус-вектора $\vec{OM}$ в заданной системе координат определяются однозначно.

Рассмотрим вектор $\vec{a}$, поместив его начало в точку О.



Обозначим координаты вектора $\vec{a}$ через a_x, a_y, a_z, тогда

$$\left.\begin{aligned} a_x &= a\cos\alpha \\ a_y &= a\cos\beta \\ a_z &= a\cos\gamma \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

α, β, γ – углы, образованные вектором $\vec{a}$ с координатными осями o_x, o_y, o_z.

Вектор $\vec{a}$ представляется в виде:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \qquad (3)$$

Тогда модуль вектора $\vec{a}$ выражается через его координаты согласно формуле:|

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (4)$$

Величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ в (2) называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{a}$. Из формул (2) получаем:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|};\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|};\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} \qquad (5)$$

Возводя в квадрат последние равенства и складывая их, получим формулу, выражающую важнейшее свойство направляющих косинусов

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (6)$$

Из равенства (6) следует, что вектор $\vec{a}_0$ с координатами $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ является единичным и совпадающим по направлению с $\vec{a}$.

$$\vec{a}_0 = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma \qquad (7)$$

Определение: *Ортом* вектора $\vec{a}$ называется вектор $\vec{a}_0$, равный отношению $\vec{a}$ на $|\vec{a}|$.

Сумма векторов и произведение вектора на число выражаются через координаты по формулам:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) + (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}$$

т.е. при сложении векторов их одноименные координаты складываются.

$$\beta\vec{a} = \beta(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) = (\beta a_x)\vec{i} + (\beta a_y)\vec{j} + (\beta a_z)\vec{k}$$

т.е. при умножении вектора на число, на это число умножаются его координаты.

Учитывая это вектор можно было бы считать упорядоченной тройной действительных чисел.

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

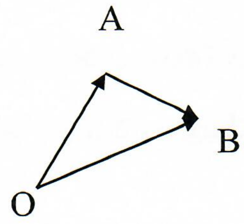
При этом

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

$$\beta \vec{a} = \beta\ (a_x, a_y, a_z) = (\beta a_x,\ \beta a_y,\ \beta a_z)$$

__Пример__. Даны координаты начала A (5 , 4, 3) и конец B (9 , 3, -2) вектора $\vec{A}\vec{B}$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$

__Решение__

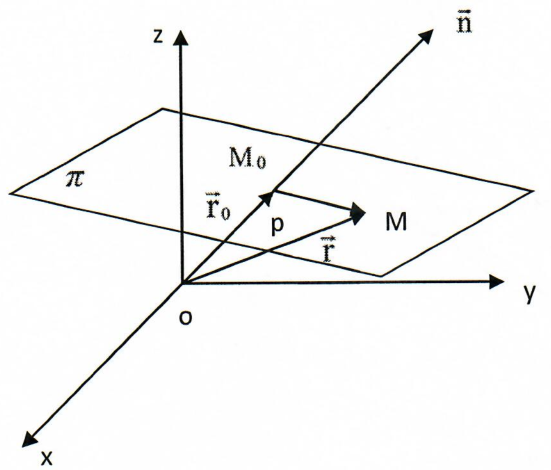


$\overrightarrow{AB}$ = (9 , 3, -2)- (5 , 4, 3) = (9 - 5, 3 – 4, -2 – 3) = (4,-1,-5).

ЛЕКЦИЯ № 5

Тема. Векторное, нормальное и координатное уравнения плоскости Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Расстояние от точки до плоскости. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

1) Векторное уравнение плоскости.



В прямоугольной декартовой системе координат рассмотрим плоскость π, которая задана $\vec{n}_0$, и точкой M_0.

Единичный вектор $\vec{n}_0$, перпендикулярный плоскости, этот вектор называется **нормаль**. Длина этого вектора $|\overrightarrow{n_0}| = 1$, а координатами являются направляющие косинусы вектора, т.е.

$$\overrightarrow{n_0} = (cos\alpha; cos\beta; cos\gamma).$$

Возьмем произвольную точку M принадлежащую плоскости π. Проведем векторы, начало которых находится в начале координат (точке O), а конец в точках M и M_0 соответственно, $\overline{OM} = \vec{r}$, $\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{r_0}$ эти векторы называются радиус-векторы точки M и M_0 соответственно.

Определение: Множество точек $M\ (x;\ y;\ z)$, удовлетворяющих условию $\overline{M_0M} \perp \vec{n}_0$, назовем плоскостью в пространстве R^3.

Любую плоскость в R^3 можно задать с помощью следующих величин:

1. Единичного вектора $\bar{n}_0$ направленного по нормам к плоскости;
2. Расстояния ρ от точки O до плоскости.

Тогда очевидно

$$\overrightarrow{r_0} = \rho \cdot \overrightarrow{n_0}$$

$$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \overrightarrow{r_0}$$

Для того чтобы точка М лежала на заданной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\overrightarrow{M_0M}$ был $\perp$ $\overrightarrow{n_0}$, т.е. чтобы их скалярное произведение было равно нулю.

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{n_0} = 0,$$

$$\left(\vec{r} - \overrightarrow{r_0}\right) \cdot \overrightarrow{n_0} = 0 \qquad (1)$$

$$\left(\vec{r} - \rho \cdot \overrightarrow{n_0}\right) \cdot \overrightarrow{n_0} = 0$$

$$\vec{r} \cdot \overrightarrow{n_0} - \rho = 0 \qquad (2)$$

Это векторное уравнение плоскости в пространстве, проходящей через точку M_0 и перпендикулярно вектору нормали $\overrightarrow{n_0}$.

2) Уравнение плоскости в нормальном виде.

Пусть введена прямоугольная декартовая система координат. Учитывая, что координаты вектора $\vec{r}$ (x, y, z), а координаты $\overrightarrow{n_0} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ подставляя их в равенство (2), получаем

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \rho = 0 \qquad (3)$$

(3) – это нормальное уравнение плоскости в координатной форме, ρ - расстояние от точки O (0;0;0) до плоскости.

3) Координатное уравнение плоскости.

Если у нас введена прямоугольная декартова система координат, то $\overrightarrow{r_0} = (x_0; y_0; z_0)$ (вектор $\overrightarrow{r_0}$ является радиус-вектором точки M_0, значит, точка M_0 также имеет координаты $(x_0; y_0; z_0)$, $\vec{r} = (x, y, z)$, тогда $\vec{r} - \overrightarrow{r_0} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$.

Введем новый вектор $\vec{n} = (A; B; C)$, такой что $\dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \overrightarrow{n_0}$, $\rightarrow \vec{n} \parallel \overrightarrow{n_0} \rightarrow \vec{n}$ - вектор нормали плоскости π, $\vec{n} \perp$ π.

Подставим координаты векторов в равенство (1), получим

$$A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0 \qquad (4)$$

(4) – уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ $\perp \vec{n}=(A;B;C)$.

<u>*Пример.*</u> Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-3;0)$ и перпендикулярно вектору $\vec{n}=(7;5;-8)$.

<u>*Решение.*</u>

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ $\perp \vec{n}=(A;B;C)$ - $A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0$, тогда $7\cdot(x-2)+5\cdot(y+3)-8\cdot(z-0)=0$. Раскрывая скобки получим $7x+5y-8z+1=0$.

4) Общее уравнение плоскости.

Преобразуем координатное уравнение плоскости $A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0$, раскрыв скобки:

$$A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z\underbrace{-A\cdot x_0-B\cdot y_0-C\cdot z_0}_{D}=0,$$

и обозначив $$D=-A\cdot x_0-B\cdot y_0-C\cdot z_0,$$

получим: $$A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0 \qquad (5).$$

(5) – общее уравнение плоскости, где A, B, C – координаты вектора нормали к плоскости.

5) Нормирующий множитель. Приведение общего уравнения плоскости к нормальному виду.

Покажем, что общее уравнение плоскости (5) может быть сведено к уравнению плоскости в нормальном виде (3). Для этого умножим уравнение (5) на величину, обратную длине вектора нормали $\vec{n}$:

$$A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0 \,\Big|\cdot \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$ получим:

$$\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\cdot x\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\cdot y\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\cdot z\pm\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0 \qquad (6)$$

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\cos\alpha;\ \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\cos\beta;\ \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\cos\gamma.$$

Вспоминая, что направляющие косинусы вектора обладают свойством:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

в нашем случае это свойство выполняется, получаем, что уравнения (6) и (3) совпадают.

Обозначим через

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (7)$$

μ - нормирующий множитель, определяемый соотношением (7).

При этом знак μ выбирается так, чтобы величина μD была бы неположительной. Поэтому знак у μ выбирается противоположным знаку D т.о. (3) также есть уравнение плоскости. Она называется *общим уравнением плоскости.* Чтобы перейти от (3) к (5) достаточно умножить (3) на заданные *нормирующий множитель* μ, определяемый соотношением (6).

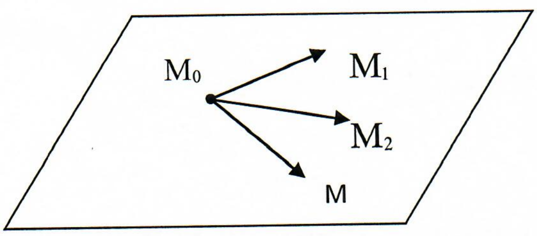
Геометрически параметр $\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ показывает расстояние от плоскости до начала координат.

6) Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.

Через 3 заданные точки можно провести единственную плоскость. Значит, 3 точки определяют плоскость. Получим её уравнение.

Пусть заданы три точки, не принадлежащие одной прямой:

$M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$. Требуется записать уравнение плоскости. Возьмем произвольную точку плоскости $M(x,y,z)$.



$M_0(x_0,y_0,z_0)$
$M_1(x_1,y_1,z_1)$
$M_2(x_2,y_2,z_2)$
$M(x,y,z)$

Найдем координаты векторов:

$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$; $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$,

$\overrightarrow{M_0M_2} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$.

эти векторы компланарны, значит их смешанное произведение равно нулю, т.е.

$$\overrightarrow{M_0M}\ \overrightarrow{M_0M_1}\ \overrightarrow{M_0M_2} = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (7)$$

Это и есть искомое уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.

Пример.

Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;0;1)$, $B(-4;1;1)$, $C(1;5;2)$.

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляем определитель

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ -4-1 & 1-0 & 1-1 \\ 1-1 & 5-0 & 2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (x-1) - y\cdot(-5) + (z-1)\cdot(-25) =$$

$$= x + 5y - 25z + 24.$$

и получаем уравнение плоскости

$x + 5y - 25z + 24 = 0.$

7) уравнение плоскости в отрезках.

Преобразуем общее уравнение плоскости (5) следующим образом:

$$A\cdot x + B\cdot y + C\cdot z = -D;$$

$$\frac{A\cdot x + B\cdot y + C\cdot z}{-D} = 1;$$

$$\frac{A\cdot x}{D}+\frac{B\cdot y}{D}+\frac{C\cdot z}{D}=1;$$

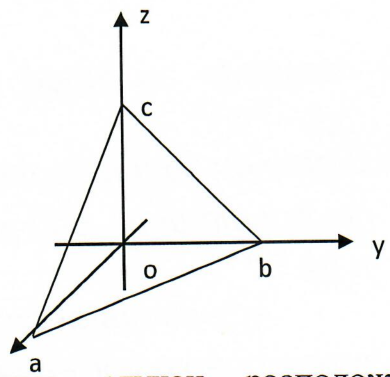
откуда

$$\frac{x}{\underbrace{-\frac{D}{A}}_{a}}+\frac{y}{\underbrace{-\frac{D}{B}}_{b}}+\frac{z}{\underbrace{-\frac{D}{C}}_{c}}=1,$$

следовательно:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (9).$$

(9) – уравнение плоскости в отрезках, геометрически: a, b, c – точки в которых плоскость пересекает координатные оси.



Рассмотрим частные случаи расположения плоскости относительно координатных осей:

1. D = 0, $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z=0$ - плоскость проходит через начало координат
2. C = 0, $A\cdot x+B\cdot y+D=0$ - плоскость параллельна оси oz.

Аналогично и для B = 0, C = 0

3. A = 0, D = 0 $\quad B_y+C_z=0$ - проходит через ось O_x

Аналогичны и другие положения.

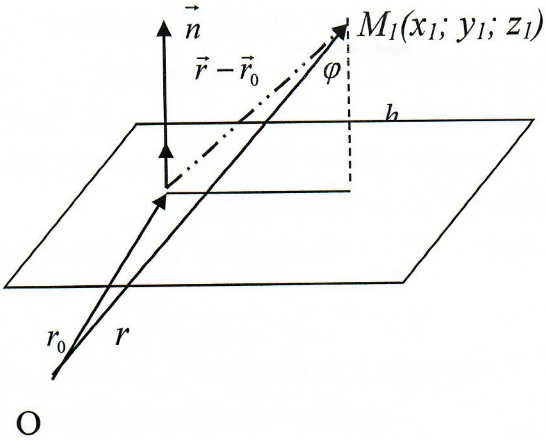
4. A = 0, B = 0 $\quad C_z+D=0$ плоскость || xO_y

Аналогично и другие.

A = 0, B = 0, D = 0 $\quad Z=0$ – плоскость xO_y.

8) Расстояние от точки до плоскости.

Найдем расстояние от точки M_1 до плоскости π



$$h = \left|\vec{r}-\vec{r}_0\right| \cdot \cos\varphi = \left|\vec{r}-\vec{r}_0\right| \cdot \underbrace{\left|\vec{n}_0\right|}_{=1} \cdot \cos\varphi = \left|\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right)\cdot \vec{n}_0\right|.$$

Итак,

$$h = \left|\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right)\cdot \vec{n}_0\right|$$

- формула расстояния от точки до плоскости. Таким образом, чтобы найти расстояние от точки до плоскости следует в нормальное уравнение плоскости (4) вместо координат вектора $\vec{r} = (x; y; z)$ следует подставить координаты этой точки. Итак, пусть $M_1 = (x_1; y_1; z_1)$, вектор $\vec{n} = (A; B; C)$, тогда

. (10)

Пример. Определите расстояние от точки $M_1(3; 5; -8)$, до плоскости $6x - 3y + 2z - 28 = 0$.

Решение. Воспользуемся формулой (10): $h = \dfrac{\left|A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C \cdot z_1 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Получим $h = \dfrac{\left|6 \cdot 3 - 3 \cdot 5 + 2 \cdot (-8) - 28\right|}{\sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \dfrac{41}{7}$.

9) Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

- Угол между плоскостями.

Пусть заданы две плоскости общими уравнениями:

$\pi_1: \quad A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0 \;\Rightarrow\; \overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$,

$$\pi_2: \quad A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$$

Угол между двумя плоскостями равен углу между их нормальными векторами.

Для того чтобы найти угол между векторами, воспользуемся определением скалярного произведения векторов:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \tag{11}$$

где φ - угол между векторами.

- Условие параллельности плоскостей

Условие параллельности плоскостей – это условие коллинеарности их нормальных векторов:

$$\pi_1 \| \pi_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \| \vec{n}_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \tag{12}$$

- Условие перпендикулярности плоскостей

Условие перпендикулярности двух плоскостей - это условие ортогональности их нормальных векторов:

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Rightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \Rightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0. \tag{13}$$

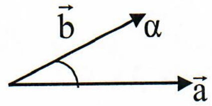
ЛЕКЦИЯ № 4

Тема. Скалярное произведение, свойства. Приложения. Векторное произведение. Свойства, вычисление, приложения. Геометрический и механический смысл векторного произведения. Смешанное произведение. Свойства, вычисление, приложения. Компланарность векторов. Свойства, приложения.

1. Скалярное произведение векторов

Определение: *Скалярным произведением* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению модулей векторов, умноженному на косинус угла между ними.

$$\vec{a},\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\vec{a},\wedge\vec{b}) \qquad (1)$$



Рассмотрим свойства скалярного произведения:

1) скалярное произведение равно – произведению модуля одного из векторов на проекцию второго вектора на направление первого. Из выражения (1) видим, что

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\alpha = |\vec{a}|\ np_a\vec{b} = |\vec{b}|\ np_b\vec{a} \qquad (2)$$

2) Скалярное произведение коммутативно: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

3) Дистрибутивность скалярного произведения: $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot c + \vec{b}\cdot\vec{c}$

Доказательство:

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = |\vec{c}|\cdot np_c(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{c}|\cdot(np_c\vec{a}+np_c\vec{b}) = \vec{c}\ np_c\vec{a}+\vec{c}\ np_c\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

4) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$

Доказательство:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Rightarrow (\,a = 0$ или $b = 0$ или $\cos(\vec{a}\wedge\vec{b}) = 0) \Rightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$.

2) $\vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow \cos(\vec{a}\wedge\vec{b}) = 0 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

5) Скалярный квадрат вектора неотрицателен: $\vec{a}\cdot\vec{a} \geq 0$, причем, $\vec{a}\cdot\vec{a} = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{a} = 0$.

если $\vec{a} \neq \vec{0}$ $\quad \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos 0 = |\vec{a}|^2 \geq 0$

6) Сочетательное свойство: для любого действительного числа λ:

$\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$

7) Скалярное произведение единичных векторов друг на друга:

$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0$, и самих на себя: $\vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = \vec{k}^{\,2} = 1$.

8) Вектора $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ взаимно ортогональны. Их модули равны единице. Это поможет нам в получении формулы для вычисления скалярного произведения векторов в заданном базисе.

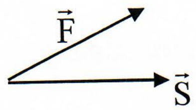
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad (3)$$

9) С помощью скалярного произведения можно определить угол между векторами. Из (1)

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\;\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Понятие скалярного произведения можно проиллюстрировать примерами из физики. Например, работа выражается формулой

$$A = F\cdot S\cdot\cos\alpha = \vec{F}\cdot\vec{S},$$



Где, $\vec{F}$ – постоянная сила, под действием которой материальная точка перемещается прямолинейно в направлении и на расстояние, заданное вектором $\vec{S}$.

__Пример.__ Пусть $\bar{a} = (-2;-3;2)$, $\bar{b} = (2;2;-3)$.Найдите скалярное произведение векторов.

__Решение.__

Вычислим $\bar{a}\cdot\bar{b}$:

$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z = -2\cdot 2 + (-3)\cdot 2 + 2\cdot(-3) = -16.$

2. Векторное произведение.

Мы уже затрагивали вопрос о правой и левой системах координат, которые очевидно связаны с соответствующей ориентацией базиса – тройки некомпланарных векторов.

Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Определение: Тройка некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}$, $\vec{c}$ называется *правой*, если из конца третьего вектора видим вращение на наименьший угол от первого ко второму против часовой стрелке (в положительном направлении).

Если это вращение происходит *по часовой стрелке*, то тройка называется *левой*.

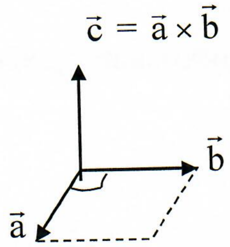
Определение: *Векторным произведением* вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, модуль которого равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а направление ортогонально к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем векторы $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ образуют правую тройку векторов (в левой системе координат – левую тройку). Обозначение $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Таким образом:

1) $\vec{c}$ имеет модуль $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a} \wedge \vec{b})$

2) $\vec{c} \perp$ векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$

3) направлен так, что вектора $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ образуют правую тройку векторов.



Свойства векторного произведения.

1) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$;

Доказательство:

a) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow |\vec{a}| = 0$ или $|\vec{b}| = 0$ или $\sin\alpha = 0 \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

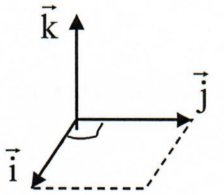
b) $\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \sin(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 0 \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

2) антикоммутативность: $\vec{a} \times \vec{b} = -\,\vec{b} \times \vec{a}$;

3) $\beta\,(\vec{a} \times \vec{b}) = (\beta\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\beta\vec{b})$;

4) дистрибутивность: $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

5) Рассмотрим векторные произведения ортов:



	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

6) Пользуясь этой таблицей и рассмотренными свойствами, найдем выражение для векторного произведения векторов, заданных своими координатами.

Пусть $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, тогда

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}) = a_x b_x(\vec{i}\times\vec{i}) + a_x b_y(\vec{i}\times\vec{j}) + a_x b_z(\vec{i}\times\vec{k}) +$$

$$+ a_y b_x(\vec{j}\times\vec{i}) + a_y b_y(\vec{j}\times\vec{j}) + a_y b_z(\vec{j}\times\vec{k}) + a_z b_x(\vec{k}\times\vec{i}) + a_z b_y(\vec{k}\times\vec{j}) + a_z b_z(\vec{k}\times\vec{k}) =$$

$$= \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \vec{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x) = \vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_x & b_y \\ a_y & b_x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Таким образом:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

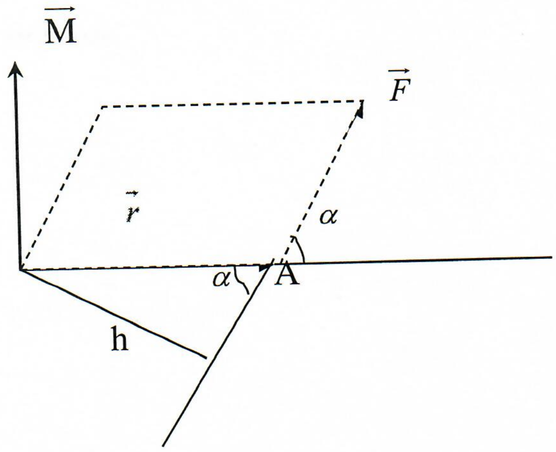
Отсюда условие коллинеарности:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Физическую иллюстрацию векторного произведения можно дать, рассмотрев момент силы относительно точки O:

$$|M| = |F| \cdot |h| = |F| \cdot |r| \cdot \sin\alpha$$

$$\overrightarrow{M} = \vec{r}\times\vec{F},$$



где точка A – точка приложения силы $\vec{F}$, h – «плечо» силы $\vec{F}$ относительно точки O, $\alpha=(\vec{F},\hat{}\vec{r})$.

Пример. Найти площадь треугольника с вершинами в точках $A(3;-4;1)$, $B(2;2;2)$, $C(-5;2;3)$.

Решение.

Площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, может быть найдена по формуле: $S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$,

где $\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$ – векторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Примем $\bar{a} = \overline{AB}$, $\bar{b} = \overline{AC}$. Вычислим координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$\overline{AB} = (2-3; 2-(-4); 2-1) = (-1;6;1);$
$\overline{AC} = (-5-3; 2-(-4); 3-1) = (-8;6;2).$

Найдем векторное произведение этих векторов

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 6 & 1 \\ -8 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \bar{i}\cdot\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} - \bar{j}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} + \bar{k}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} = 6\bar{i} - 6\bar{j} + 42\bar{k}.$$

Тогда $\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \sqrt{6^2 + (-6)^2 + 42^2} = 6\sqrt{51}.$

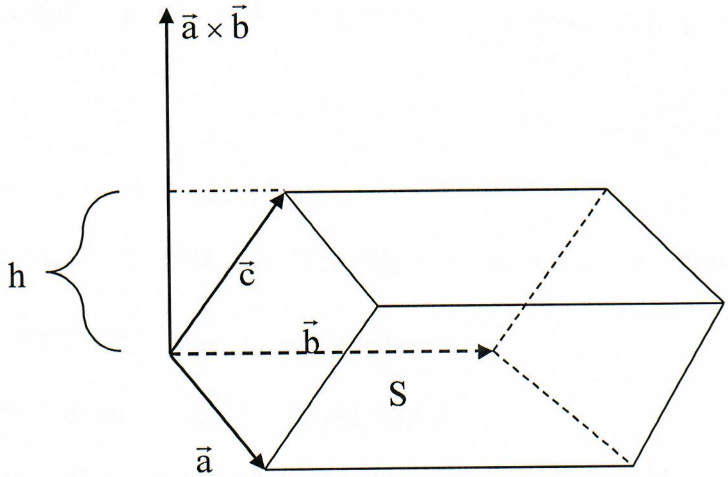
Следовательно, $S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{51} = 3\sqrt{51}.$

3. Смешанное произведение векторов.

Определение: Число $(\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{c}$ называется *смешанным произведением* векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Обозначение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

Рассмотрим геометрический смысл смешанного произведения.



На перемножаемых векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – построим параллелепипед.

Как известно, объем параллелепипеда равен площади параллелограмма, умноженному на высоту, которую можем определить как проекцию вектора $\vec{c}$ на вектор, полученный в результате векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$|\vec{a} \times \vec{b}| = S$

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = |\vec{a}\times\vec{b}| \cdot \text{пр}_{a\times b}\,\vec{c} = S\,(\pm h) = \pm V_{пар-да}$

Из чертежа видно, что это число будет положительным, если a, b, c образуют правую тройку, и отрицательным, если – левую.

Следовательно, $|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}| = V_{пар-да}$.

т.е. модуль смешанного произведения выражает объём параллелепипеда, построенного на перемножаемых векторах. При этом знак смешанного произведения будет положительным, если $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку, и отрицательным, если $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – левая тройка.

Т.к. $V_{пар-да} = \frac{1}{6}V_{пир} = \frac{1}{6}|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}| = V_{пир}$

Если три вектора компланарны, то, очевидно, объём параллелепипеда, построенного на них равен нулю. Верно и обратное:

т.о. $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \mathbf{0}}$ - есть условие компланарности трёх векторов

Свойства смешанного произведения.

Рассмотрим, как меняется смешанное произведение при перестановке сомножителей.

1. При циклической перестановке векторов в смешанном произведении имеем:

$$\left.\begin{aligned} \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} &= (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = V \\ \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a} &= (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = V \\ \vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b} &= (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b} = V \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{ориентация}\\ \text{тройки}\\ \text{сохранилась}\end{array}$$

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a} = \vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}.$$

2. Перестановка двух соседних множителей ведет к смене знака смешанного произведения (меняется ориентация тройки):

$$\left.\begin{aligned} \vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c} &= -V \\ \vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b} &= -V \\ \vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a} &= -V \end{aligned}\right\} \text{ориентация тройки - левая}$$

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c} = -\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b} = -\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}.$$

3. Смешанное произведение векторов , если известны координаты, можно вычислить при помощи определителя третьего порядка первая строка которого есть координаты вектора $\vec{a}$, вторая строка – координаты вектора $\vec{b}$, третья – координаты вектора $\vec{c}$:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot(\vec{i}c_x + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}) =$$

$$= \left(\vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right)\cdot(c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}) =$$

$$= c_x\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

4. Условие компланарности трех векторов можно записать в виде:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

Пример.

Найти объём треугольной пирамиды ABCD с вершинами в точках:

A(2,2,4); B(4,3,3); C(4,5,4); D(5,5,4)

Решение: 1) Найдем векторы:

$\overrightarrow{AB} = (2,1,-1)$; $\overrightarrow{AC} = (2,3,0)$; $\overrightarrow{AD} = (3,3,0)$

2) Вычислим: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -1(6 - 9) = 3$

3) $V_{\text{пар-да}}=3$, тогда $V_{\text{пир-ды}}=\frac{1}{6}V_{\text{пар-да}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ ед^3.