ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Методические указания к практическим занятиям и самостоятельной работе студентов

Утверждены редакционно-издательским советом университета 19 января 2005 года

Самара 2005

Составители: Кузнецова И.А., Хлебникова М.Ю.

УДК 517.3(07)

Предел функции: Методические указания / Сост.: Кузнецова И.А., Хлебникова М.Ю.; Самарский государственный архитектурно-строительный университет. Самара, 2005.

Данные методические указания являются разработкой практических занятий по теме «Предел функции». Они построены так, что студенты могут изучать тему с теоретической и практической сторон самостоятельно, используя лекции и рекомендованные учебники. Кроме того, в этих разработках даны индивидуальные домашние задания по данной теме. Методические указания рассчитаны на студентов I курса следующих специальностей: 290300(«Промышленное и гражданское строительство»), 290500 («Городское строительство и хозяйство»), 291000(«Автомобильные дороги и аэродромы»), 290400(«Гидротехническое строительство»), 290700 («Теплогазоснабжение и вентиляция»), 290800 («Водоснабжение и водоотведение»), 330200 («Инженерная защита окружающей среды»), 290600 («Производство строительных материалов, изделий и конструкций»), 291300 («Механизация и автоматизация строительства») и составлены в соответствии с рабочим планом кафедры высшей математики Могут быть полезны студентам первого курса ИЭФ и студентам заочной формы обучения.

Начало изучению понятия предела положено уже в школе. Там с помощью предельных переходов определяется длина окружности, площади боковых поверхностей и объемы цилиндра и конуса, площадь поверхности и объем шара. Понятие предела использовано также при определении суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. В данных методических указаниях нам предстоит изучить теорию предела на более общей основе, с необходимой глубиной и строгостью, что позволит расширить круг приложений теории пределов к решению теоретических и практических задач.

Понятие предела вместе с понятием функции составляет основу математического анализа. Все остальные разделы курса, так или иначе, используют теорию пределов.

Определение предела функции, его геометрическая интерпретация. Табличные пределы

Если независимая переменная величина x принимает значения, как угодно близкие к числу α, то есть x неограниченно приближается к α, то говорят, что x стремится к α и записывают: $x \to \alpha$ или $\lim x = \alpha$. Точка α называется предельной точкой переменной x.

Переменная x может стремиться к своему пределу α различными способами: 1) слева, т. е. оставаясь меньше α, что условно записывают $x \to a-0$ или $\lim x = a-0$ (рис.1);

2) справа, т. е. со стороны значений, больших α, что обозначается как $x \to a+0$ или $\lim x = a+0$ (рис.2);

3) колеблясь, как при затухающих колебаниях (рис.3).

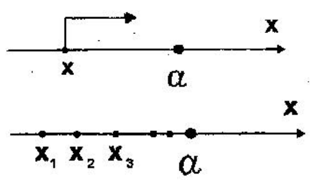


Рис. 1

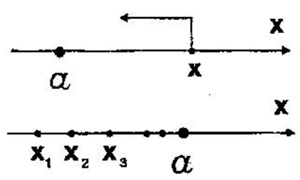


Рис. 2

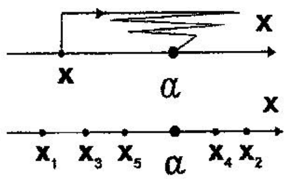


Рис. 3

Если записано $x \to \alpha$, то подразумевается, что закон приближения x к α может быть любым. Может оказаться, что переменная x при своем изменении становится больше любого (как угодно большого) числа, тогда говорят, что $x \to +\infty$.

Это соответствует неограниченному удалению точки x вправо по оси 0x (рис.4).

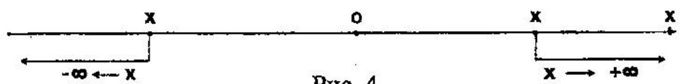


Рис. 4

Запись $x \to -\infty$ означает, что переменная x может быть сделана меньше любого отрицательного числа, точка x при этом удаляется по оси 0x неограниченно влево (рис.4). Если же переменная x изменяется так, что $|x|$ безгранично возрастает и при этом знак x безразличен, x может быть положительным и отрицательным, то мы говорим, что $x \to \infty$.

Рассмотрим теперь функцию $y = f(x)$ и определим понятие ее предела при $x \to a$.

<u>Определение 1.</u> Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$ (т.е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$), если для всех значений x, достаточно близких к числу a, соответствующие значения $y = f(x)$ будут как угодно мало отличаться от b.

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ или $y = f(x) \underset{x \to a}{\to} b$, то это означает, что точки (x, y) графика функции $y = f(x)$ неограниченно с двух сторон приближаются к точке (a, b) (рис.5).

Можно находить предел функции $f(x)$, когда x стремится к своей предельной точке a только слева, и тогда получим левый предел $f(x)$, который обозначается так: $b_1 = \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$.

Аналогично при x, стремящемся к a справа, определяется правый предел:

$b_2 = \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$.

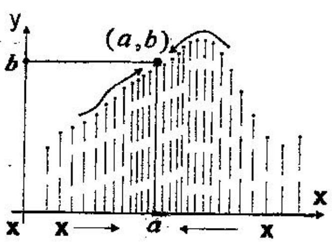


Рис. 5

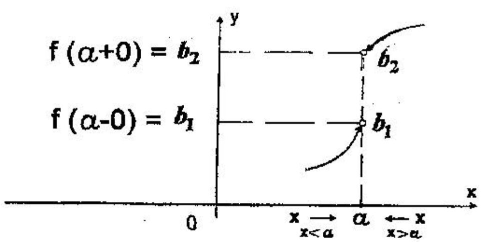


Рис. 6

Левый и правый пределы функции называются односторонними. Из рис.6 ясно, что $f(x)$ имеет при $x \to a$ предел в смысле определения 1, если точки b_1 и b_2 совпадают. Тогда

$$f(a-0) = f(a+0) = \lim_{x \to a} f(x).$$

Проиллюстрируем сказанное на примере функции $y = f(x)$, заданной графиком (рис.7). Представьте, что $x \to 4$ (и справа и слева), тогда ординаты y точек графи-

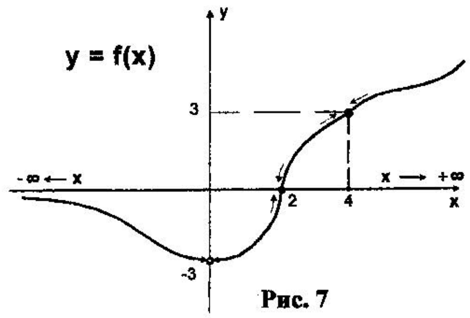


Рис. 7

ка будут приближаться к 3 (и сверху и снизу). Это означает, что $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 3$.

Рассуждая аналогично, придем к выводу, что $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$.

Обратите внимание, что в этих случаях пределы совпадают со значениями $f(4) = 3$ и $f(2) = 0$ (то, что эти значения определены, на рис.7 показано закрашенными кружочками). Этот факт не случаен.

Сформулируем его в виде следующего утверждения:

Если элементарная функция $f(x)$ определена в точке $x = a$, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$; то есть при $x \to a \in D(f)$ $\lim f(x)$ находится подстановкой в $f(x)$ значения $x = a$.

Примеры:

1. $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - \frac{1}{x}) = 2^2 - \frac{1}{2} = 4 - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} = 3{,}5$.
2. $\lim\limits_{x \to \pi}(\sin\frac{x}{6} + \frac{x-\pi}{3} - \frac{1}{x} \cdot arctg\frac{x}{\pi}) = \sin\frac{\pi}{6} + \frac{\pi-\pi}{3} - \frac{1}{\pi} \cdot arctg\frac{\pi}{\pi} = \frac{1}{4}$.

Рассмотрим на рис.7 $x \to 0$. При $x \to 0-0$ получаем $f(x) \to -3$ и при $x \to 0+0$ тоже $f(x) \to -3$. Это записывают так:

$$f(0-0) = \lim_{x \to 0-0, x<0} f(x) = -3 \ ; \quad f(0+0) = \lim_{x \to 0+0, x>0} f(x) = -3.$$

Если односторонние пределы равны $[f(0-0) = f(0+0) = -3]$, то существует $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -3$ (в смысле определения 1). Заметьте, что график $f(x)$ только стремится к точке (0;-3) слева и справа, но сама эта точка исключена из графика, т.е. $f(x)$ в точке $x = a$ не определена (на рис.7 это обозначено светлым кружочком). На этом примере мы показали, что $f(x)$ может иметь предел при $x \to a$ и в тех случаях, когда в точке $x = a$ функция $f(x)$ не определена (т.е. $x = a$ не $\in D(f)$), однако и слева от точки $x = a$, и справа от нее функция $f(x)$ должна быть определена (см. рис.7).

Покажем это на примере аналитически заданной функции $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$, которая не определена в точке $x = 3$. Для точек, лежащих слева и справа от точки $x = 3$, т. е. при $x \to 3$, но $x \neq 3$ $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = x + 3$.

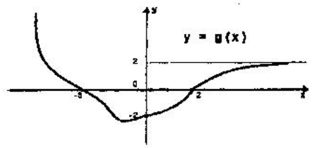
Поэтому $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3}(x + 3) = 3 + 3 = 6$.

Вернемся к рис.7 и рассмотрим $x \to -\infty$. При x, удаляющихся по оси Ох неограниченно влево, график функции $f(x)$ приближается к оси Ох, на которой значения $f(x)$ равны нулю. Значит, $f(x) \to 0$ или $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

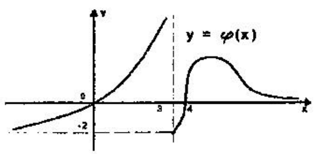
Допустима запись $\lim_{x \to -\infty} f(x) = f(-\infty)$, т.е. в нашем случае $f(-\infty) = 0$.

Для этого же графика (рис.7) при $x \to +\infty$ значения $f(x)$ неограниченно увеличиваются, поэтому $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ или коротко этот факт записывают так: $f(+\infty) = +\infty$.

• Упражнение 1



1. Найдите $\lim_{x \to 0} g(x)$; $\lim_{x \to -3} g(x)$; $\lim_{x \to 2} g(x)$; $g(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} g(x)$; $g(-\infty) = \lim_{x \to \infty} g(x)$.



2. Найдите $\varphi(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} \varphi(x)$; $\varphi(3-0) = \lim_{x \to 3-0} \varphi(x)$; $\varphi(3+0) = \lim_{x \to 3+0} \varphi(x)$; $\varphi(3)$.Существует ли $\lim_{x \to 3} \varphi(x)$? При каких условиях $\lim \varphi(x) = 0$?

3. Вычислите данные пределы:

а) $\lim_{x \to 2}\left(\frac{x^3}{4} - 2^{-x} + \cos\frac{\pi}{x}\right)$; б) $\lim_{x \to -1}(\log_3(-x) + arctgx)$;

в) $\lim_{x \to 4}\left(x^{\frac{3}{2}} - tg\frac{\pi}{x}\right) \cdot 1{,}39^{4-x}$; г) $\lim_{x \to 3}\left(\log_{\frac{1}{3}} x - \sqrt[3]{3x^2}\right) \cdot \frac{x^3 - 27}{x - 3}$.

4. С помощью графиков основных элементарных функций найдите:

а) $\lim_{x \to 0} \sin x$; б) $\lim_{x \to \pi} \cos x$; в) $\lim_{x \to 1} \log_2 x$; г) $\lim_{x \to 0} arctgx$;

д) $tg\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} tgx$; $tg\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} tgx$ (существует ли предел $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} tgx$?);

е) $3^{-\infty} = \lim_{x \to -\infty} 3^x$; ж) $\log_{\frac{1}{3}}(0+0) = \lim_{x \to 0+0} \log_{\frac{1}{3}} x$; з) $arctg(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} arctgx$.

Пределы, найденные Вами в п.4 упражнения 1 и им подобные, называются табличными. Они доказываются с помощью определения предела, что будет рассмотрено ниже.

Покажем на примерах, как табличные пределы применяются для вычисления.

Примеры:

1. $\lim_{x \to \infty} \log_2(x^2 + 4) = \log_2(+\infty) = \lim_{u \to +\infty} \log_2 u = +\infty$.

2. $\lim_{x \to -\infty} arctg(3x + 4) = arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$.

3. $\lim_{x \to \frac{1}{2} + 0} \log_{\frac{1}{3}}(2x - 1) = \log_{\frac{1}{3}}\left(2 \cdot \left(\frac{1}{2} + 0\right) - 1\right) = \log_{\frac{1}{3}}(+0) = +\infty$.

• Упражнение 2

Используя графики основных элементарных функций, найдите пределы.

1) $\lim_{x \to 0+0}(3x + 2)^{\log_2 x}$; 2) $\lim_{x \to -\infty} 3^{5-x}$; 3) $\lim_{x \to 6-0} \log_7(6 - x)$.

До сих пор при нахождении пределов мы считали график функции известным и опирались на него в решении задач. Поставим теперь обратную задачу: пусть функция $f(x)$ задана некоторой формулой, а график ее нам не известен. Предположим, что мы нашли каким-то способом $\lim_{x \to a} f(x) = b$, где a и b - либо числа, либо символы $+\infty$, $-\infty$. Мы уже говорили, что тогда график $f(x)$ слева и справа должен приближаться к точке (a, b), но мы пока не знаем, в каких границах его можно построить. Понятие близости переменной величины к своей предельной точке дается с помощью окрестности точки.

Определение 2. ***Окрестностью $U(a)$ точки a называется любой интервал, содержащий точку a*** (рис.8).

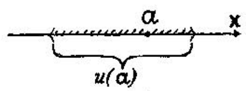


Рис. 8

Конечно, можно указать сколько угодно окрестностей точки a, но если нужно показать, что $x \to a$, то x берут в малой окрестности $U(a)$.

Окрестности бесконечно удаленных точек, показанные на рис.9, следует брать как можно дальше влево по оси Ох.

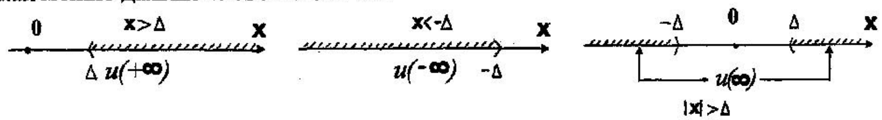


Рис. 9

Определение предела можно уточнить так:

Определение 3. ***Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$ ($\lim_{x \to a} f(x) = b$), если для произвольно ($\forall$) малой окрестности $U(b)$ точки b существует ($\exists$) такая окрестность $U(a)$ точки a, что для всех ($\forall$) $x \in U(a)$ значения $f(x) \in U(b)$.***

Как и в определении 1, под a и b подразумеваются числа или символы $+\infty$, $-\infty$, ∞.

В определении 3 знак $\forall$ - квантор всеобщности (читается «для любого» или «для произвольного» или «для всех»); знак $\exists$ - квантор существования (читается - «существует», «найдется»).

С помощью кванторов определение 3 записывают так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall U(b)\ \exists U(a):\ \forall x \in U(a),\ x \neq a \Rightarrow f(x) \in U(b).$$

Покажем на примере, что определение 3 удобно использовать для иллюстрации пределов в любых случаях.

Пусть требуется построить эскиз графика функции $y = f(x)$ в окрестности определенных точек, если $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$, причем $f(x) > 3$ при $x \in U(-\infty)$, и $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

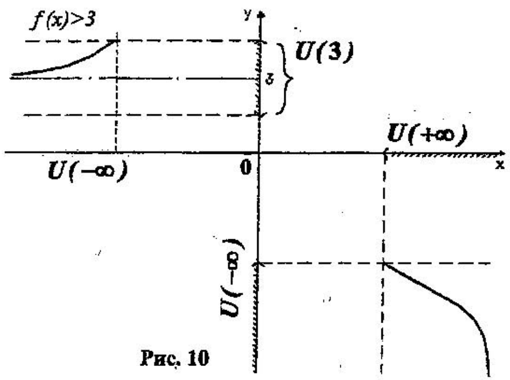


Рис. 10

Отметим на оси Ox окрестности $U(-\infty)$ и $U(+\infty)$ для предельных точек x, а на оси Oy – окрестности $U(3)$ и $U(-\infty)$ предельных точек $y = f(x)$. Значения x и y точек графика (x, y) берутся из этих окрестностей, значит, графики лежат в бесконечных фигурах (рис.10).

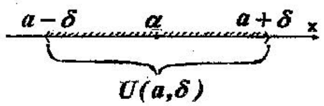


Рис. 11

Зададим теперь окрестности с помощью неравенств, причем будем использовать окрестности с центром в данной точке.

На рис.11 интервал $(a-\delta; a+\delta) = U(a,\delta)$ есть δ-окрестность точки a, число $\delta > 0$.

Если $x \in U(a,\delta)$, то $a - \delta < x < a + \delta$ или $-\delta < x - a < \delta$, или $|x-a| < \delta$.

Расстояние между переменной x и числом a, т. е. $|x-a|$ может быть сделано очень малым при малых $\delta > 0$. Аналогично рассматривается ε - окрестность точки b и, если $f(x) \in U(b,\varepsilon)$, то $|f(x)-b| < \varepsilon$.

Определение 4

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = b}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0:\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon}$$

Определение 4 применяется для различных доказательств.

1.Докажем, что предел любой постоянной величины равен этой величине:

$$\boxed{\lim C = C}$$

Постоянную $C = const$ можно рассматривать как функцию $y = C$. Возьмем $\forall \varepsilon > 0$. Тогда при $\forall x$ выполняется неравенство $|y - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon$. Значит наше утверждение верно.

2.Докажем, что $\lim_{x \to 2}(2x-1) = 3$.

По определению 4 запишем:

$$\lim_{x \to 2}(2x-1) = 3 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$$

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |(2x-1) - 3| < \varepsilon. \ (*)$$

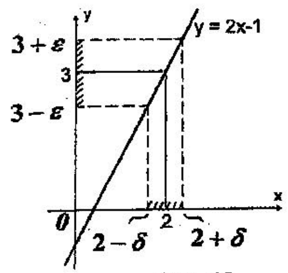


Рис. 12

Преобразуем последнее неравенство

$$|2x - 1 - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x - 1| < \varepsilon.$$

Осуществляя обратный ход, видим, что при $|x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ выполняется неравенство (*), значит можно взять $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Определение 4 справедливо для данного предела, поэтому $\lim_{x \to 2}(2x-1) = 3$. Геометрическая интерпретация доказательства дана на рис.12. Способ доказательства того факта, что $\lim_{x \to a} f(x) = b$, с помощью определения 4 является общим и используется для любых функций.

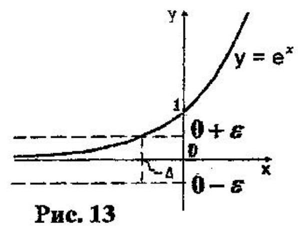


Рис. 13

Однако определение 4 не годится для бесконечно удаленных предельных точек, так как неравенства $|x - a| < \varepsilon$ и $|f(x) - b| < \varepsilon$ определяют окрестности для конечных значений a и b.

Рассмотрим доказательство того, что $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.

По определению $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta > 0:\ x < -\Delta \Rightarrow |e^x - 0| < \varepsilon$ или $e^x < \varepsilon$.

Из неравенства $e^x < \varepsilon$ следует, что $x \ln e < \ln \varepsilon$, т.е. $x < \ln \varepsilon$. Поскольку ε должно быть малым числом, во всяком случае $\varepsilon < 1$, то $\ln \varepsilon < 0$, тогда $\Delta = -\ln \varepsilon > 0$.

Итак, мы нашли $\Delta > 0$ такое, что при $x < -\Delta$ $e^x < \varepsilon$; это и означает, что $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$. Геометрически доказательство проведено на рис.13.

Подобно этому можно рассматривать пределы всех основных элементарных функций в граничных точках (конечных или бесконечных) их области определения.

Пределы, доказательства которых получены на основании определения, называются табличными. Например, табличными являются

$$\lim_{x \to +\infty} arctg x = \frac{\pi}{2}; \quad \lim_{x \to 0+0} \log_a x = -\infty\ (a > 1); \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} tg x = +\infty \quad \text{и т.п.}$$

Табличные пределы легко находятся по графикам функций. Заметим, что при изучении этого вопроса мы считали графики известными, но, вообще говоря, сначала исследуются свойства функций и уже на этом основании строятся их графики.

При вычислении пределов более сложных функций используют табличные пределы и теоремы о пределах, которые мы рассмотрим далее.

Операции с бесконечно большими, бесконечно малыми и ограниченными функциями

Пусть функция $y = f(x)$ рассматривается на некотором числовом множестве X, которое может быть промежутком числовой оси или совокупностью промежутков.

Определение 5. ***Функция $y = f(x)$ называется ограниченной на множестве X, если:***

1) $\exists M > 0$ такое, что при $\forall x \in X$ $|f(x)| \le M$ или

2) $\exists M$ и $\exists m$ такие, что при $x \in X$ $m \le |f(x)| \le M$.

Если выполняется неравенство $f(x) \le M$, то $f(x)$ называется ограниченной сверху; если $f(x) \ge m$, то $f(x)$ ограничена снизу.

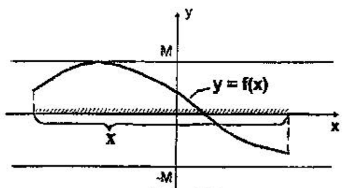


Рис. 14

Неравенство $|f(x)| \le M$ равносильно такому: $-M \le f(x) \le M$. Значит, в этом случае график $y = f(x)$ будет лежать внутри полосы, ограниченной прямыми $y = -M$ и $y = M$ (рис.14).

Например, функция $y = arctgx$ ограничена при $x \in (-\infty; +\infty)$, так как $|arctgx| < \frac{\pi}{2}$.

Мы рассмотрели понятие ограниченности функции на множестве. При нахождении пределов важно знать, что означает ограниченность функции при $x \to a$.

Определение 6. ***Функция $y = f(x)$ называется ограниченной при $x \to a$, если она ограничена в некоторой окрестности $U(a)$.***

Справедливо следующее утверждение:

Если $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и b- конечно, то:

1) $f(x)$ ограничена при $x \to a$;

2) $\frac{1}{f(x)}$ ограничена при $x \to a$ в случае $b \ne 0$.

Например, 1) $\lim\limits_{x \to 0} e^x = 1$, значит $y = e^x$ ограничена при $x \to 0$;

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} arctgx = \frac{\pi}{2}$, следовательно, $y = arctgx$ ограничена при $x \to +\infty$;

3) $\lim\limits_{x \to 0+0} log_2 x = -\infty$, следовательно, $y = log_2 x$ не ограничена при $x \to 0+0$.

Определение 7. ***Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ (или $+\infty$, или $-\infty$).***

Например, 1) $y = log_2 x$ - бесконечно большая при $x \to 0+0$;

2) $y = x^2$ - бесконечно большая при $x \to \infty$.

Определение 8. ***Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если*** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Например, 1) функция $y = cos\,x$ - бесконечно малая при $x \to \frac{\pi}{2}$;

2) $y = e^x$ - бесконечно малая при $x \to -\infty$.

• Упражнение 3

1. Для переменной x укажите условия, при которых функции $y = x^3$; $y = ln\,x$; $y = e^x$; $y = 2x + x^2$ являются бесконечно малыми и бесконечно большими.

2. Какие из функций $h(x)$; $A(x)$; $g(x)$; $\alpha(x)$ и $\frac{1}{\alpha(x)}$ являются ограниченными в окрестности предельных точек, если $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 5$; $\lim\limits_{x \to 1} A(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0-0} g(x) = -3$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$.

По конспекту лекций или учебнику [1, гл.II, §§ 4,5] прочтите, какими свойствами обладают бесконечно большие и бесконечно малые функции, как они связаны между собой и с ограниченными функциями, а также основные теоремы о пределах.

• Упражнение 4

На основании свойств бесконечно больших и бесконечно малых величин найдите пределы:

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{2}{x}; \quad \lim_{x \to -\infty}(5 - x); \quad \lim_{x \to 1} \frac{3}{(x-1)^2}; \quad \lim_{x \to \infty} \frac{-7}{x^3}.$$

Свойства бесконечно больших и бесконечно малых функций запишем символически, применяя следующие обозначения:

0 – символ бесконечно малой функции;

∞ - символ бесконечно большой функции;

C – число, ограничивающее функцию $f(x)$ при $x \to a$, т. е.

1) $C = \lim\limits_{x \to a} f(x)$;

2) $|f(x)| \le C$ (в этом случае $C > 0$);

3) $f(x) \le C$ или $f(x) \ge C$ при $x \to a$.

Операции с бесконечно малыми, ограниченными и бесконечно большими функциями.

СЛОЖЕНИЕ

$$+\infty + \infty = +\infty;$$
$$-\infty - \infty = -\infty;$$
$$\infty + C = \infty.$$

Не определено $[\infty - \infty]$.

УМНОЖЕНИЕ

$$C \cdot 0 = 0;$$
$$C \cdot \infty = \infty \text{ при } C \ne 0;$$
$$\infty \cdot \infty = \infty.$$

Не определено $[0 \cdot \infty]$.

ДЕЛЕНИЕ

$$\frac{C}{\infty} = 0; \quad \frac{0}{\infty} = 0;$$
$$\frac{C}{0} = \infty \text{ при } C \ne 0;$$
$$\frac{\infty}{0} = \infty.$$

Не определены $\left[\frac{0}{0}\right]; \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ

$$(+\infty)^{+\infty} = +\infty;$$
$$(+0)^{+\infty} = 0;$$
$$(+0)^{-\infty} = +\infty.$$

Не определены $[1^{\infty}], [0^0], [\infty^0]$.

Замечание. Функция $y = [u(x)]^{v(x)}$, где $u(x) > 0$ и $u(x) \ne 1$, называется показательно-степенной. Поскольку $u(x) > 0$ по определению, то степени бесконечно больших отрицательных функций не рассматриваются.

Примеры:

1. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} (x - tgx) = \frac{\pi}{2} - tg(\frac{\pi}{2} - 0) = \frac{\pi}{2} - (+\infty) = \frac{\pi}{2} - \infty = [-\infty + C] = -\infty.$

2. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{e^x}{(x-2)^2} = \frac{e^2}{+0} = \left[\frac{C > 0}{+0}\right] = +\infty.$

3. $\lim\limits_{x \to -1+0} (2x+5)^{\frac{x}{x+1}} = (2 \cdot (-1+0) + 5)^{\frac{-1+0}{-1+0+1}} = (-2+5)^{\frac{-1}{+0}} = 3^{-\infty} = 0.$

● **Упражнение 5**

Найдите следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} (5^x + \frac{2}{x-2})$; 2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(2x - \pi)^{12}}$; 3) $\lim\limits_{x \to 0,5} \frac{\log_3 x}{(2x-1)^2}$;

4) $\lim\limits_{x \to 2-0} (3x - 5{,}6)^{\frac{x}{x-2}}$; 5) $\lim\limits_{x \to \infty} (0{,}83)^{\frac{2}{x}}$; 6) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{arctgx}{x}$.

Рассмотрим одну очень важную функцию.

Определение 9. ***Функция*** $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n$, ***где*** $a_0 \ne 0$, $n \in N$, ***называется многочленом степени*** n ***или целой рациональной функцией;*** $a_0 x^n$ ***- старший член многочлена.***

Для такой функции справедливо следующее утверждение:

Многочлен при $x \to \infty$ ***является бесконечно большой функцией и его предел равен пределу старшего члена.***

Значит, по определению 4 многочлен $P_n(x)$ при $x \to \infty$ есть бесконечно большая функция и $\lim\limits_{x \to \infty} P_n(x) = \lim\limits_{x \to \infty} a_0 x^n$.

Примеры:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^3 - 2x + 7) = \lim\limits_{x \to \infty} 3x^3 = 3 \cdot (+\infty)^3 = 3 \cdot (+\infty) = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} (5 + 1{,}2x - 4x^2) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-4x^2) = -4 \cdot (-\infty)^2 = -4 \cdot (+\infty) = -\infty$.

В дальнейшем мы покажем, что, вычисляя предел при $x \to \infty$, многочлен $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ можно заменить его старшим членом $a_0 x^n$ во всех случаях, где нет разности многочленов с одинаковыми старшими членами.

В последнем случае нужно сначала привести подобные члены. Например,

$$\lim_{x \to \infty} [(3x^4 - 5x^2 + 7) - (3x^4 + 2x)] = \lim_{x \to \infty} (3x^4 - 5x^2 + 7 - 3x^4 - 2x) = \lim_{x \to \infty} (-5x^2 - 2x + 7) =$$
$$= \lim_{x \to \infty} (-5x^2) = -\infty$$

Обобщим все теоремы о пределах, с которыми Вы познакомились. Случаи, когда они не могут быть применены, нами уже выделены при определении операций над бесконечно большими, бесконечно малыми и ограниченными функциями. Этих случаев семь, они называются неопределенностями.

Пусть $F(x)$, $f(x)$, $g(x)$ - элементарные функции; $C = const$, будем считать, что $x \to a$, где a - либо число, либо символы: ∞, $+\infty$, $-\infty$. Для краткости будем опускать аргумент x в функциях и запись $x \to a$.

Правила вычисления пределов

1. $\lim C = C$. 2. $\lim C\cdot f = C\cdot \lim f$.
3. $\lim(f\pm g)=\lim f \pm \lim g$, **кроме случая** $[\infty-\infty]$.
4. $\lim f\cdot g = \lim f\cdot\lim g$, **кроме случая** $[0\cdot\infty]$.
5. $\lim\dfrac{f}{g}=\dfrac{\lim f}{\lim g}$, **кроме случаев** $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ **и** $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.
6. $\lim f^{g} = (\lim f)^{\lim g}$, **кроме случаев** $[1^\infty]$; $[0^0]$; $[\infty^0]$.
7. $\lim F(f)=F(\lim f)$, **если** $\exists F(\lim f)$, **конечный или бесконечный.**

Примеры:

1. $\lim\limits_{x\to0} tg(x^2-3x) = tg(\lim\limits_{x\to0}(x^2-3x)) = tg(0^2-3\cdot0)=tg0=0.$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} 4^{3x^3-5x+1} = 4^{\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^3-5x+1)} = 4^{\lim\limits_{x\to+\infty}3x^3} = 4^{+\infty}=+\infty.$

3. $$\lim_{x\to-\infty}\ln(7-x-2x^5)=\ln(\lim_{x\to-\infty}(7-x-2x^5))=\ln(\lim_{x\to-\infty}(-2x^5))=\ln(-2\cdot(-\infty)^5)=$$
$$=\ln(-2(-\infty))=\ln(+\infty)=+\infty.$$

Случаи неопределенности

Напомним, что случаи $[\infty-\infty]$, $[0\cdot\infty]$, $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, $[1^\infty]$,$[0^0]$ $[\infty^0]$ называются неопределенностями, так как на них не распространяются рассмотренные правила вычисления пределов. При вычислении предела функции, представляющей собой в окрестности предельной точки одну из неопределенностей, нужно проделать над ней тождественные преобразования, после которых возможны применения правил 3-7. Такие преобразования называют раскрытием или устранением неопределенности.

<u>Неопределенность</u> $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Примеры:

1. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x}{5x-3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)}{x\left(5-\dfrac{3}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)}{5-\dfrac{3}{x}}=\frac{\infty^2(1+0)}{5-0}=+\infty.$$

Можно сделать проще:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x}{5x-3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{5x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{5}=\frac{\infty^2}{5}=+\infty.$$

2. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x+2^x}{2^{2x}-3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\left(1+\dfrac{2^x}{3^x}\right)}{2^{2x}\left(1-\dfrac{3}{2^{2x}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^x\cdot\frac{1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^x}{1-\dfrac{3}{4^x}}=\left(\frac{3}{4}\right)^{+\infty}\cdot\frac{1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{+\infty}}{1-\dfrac{3}{\infty}}=0\cdot\frac{1+0}{1-0}=0.$$

Методы раскрытия неопределенности $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, рассмотренные на этих примерах, являются общими. Наиболее часто встречается случай, когда нужно найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где

$$P_m(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m;\qquad Q_n(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n.$$

В этом случае целесообразно пользоваться следующим правилом:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\begin{cases}0 \text{ при } m<n;\\ \dfrac{a_0}{b_0} \text{ при } m=n;\, a_0\neq0, b_0\neq0;\\ \infty \text{ при } m>n.\end{cases}$$

• Упражнение 6

Найдите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-4x^2+1}{8x^3-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x-1)^3(1-2x)}{5x^4-3x+2}$; 3) $\lim\limits_{x\to-\infty}8^{\frac{x^2}{1-2x}}$.

<u>Неопределенность</u> $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Примеры:

1) $$\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{2x^2-x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+4)}{2(x-1)(x+\frac{1}{2})}=\lim_{x\to1}\frac{x+4}{2x+1}=\frac{5}{3}.$$

2) $$\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{3x-x^2-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{-(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x+4}{1-x}=\frac{12}{-1}=-12.$$

Часто неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ встречается при вычислении предела отношения иррациональных функций. В этих случаях критический множитель можно выделить, ликвидируя иррациональность.

Примеры:

1) $$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{3})(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}{(x^2-4)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{3})^2}{(x^2-4)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}=$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x+1-3}{(x^2-4)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}=\frac{1}{4\cdot2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{24}.$$

2) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{x^2-9x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{x(x-9)}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{-(\sqrt{x}-3)}{x(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{-1}{x(\sqrt{x}+3)}=-\dfrac{1}{54}$.

<u>Неопределенность</u> $[\infty-\infty]$ и $[0\cdot\infty]$.

Если при вычислении предела встречаются неопределенности $[\infty-\infty]$ или $[0\cdot\infty]$, то путем тождественных преобразований их сводят к случаям $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ или $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Примеры:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x^2-1}\cdot(x-3)=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5(x-3)}{x^2-1}=0$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\lg x-\lg x^2)=[\lg(+\infty)-\lg(+\infty)=\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to+\infty}\lg\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\lg\dfrac{1}{x}=\lg(+0)=-\infty$.

О раскрытии других видов неопределенности поговорим позднее.

• Упражнение 7

Найдите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sqrt{x}-x}{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}tg\dfrac{3x-x^2}{x^2-2x-3}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}arctg\dfrac{1-x^3}{x+1}$.

Эквивалентные функции и их использование при вычислении пределов

<u>Определение 10.</u> Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$.

$$\boxed{f(x)\underset{x\to a}{\approx}g(x)\Leftrightarrow\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1}$$

Например, $\log_2(x+1)\underset{x\to 1}{\sim}(2x-1)$, так как $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\log_2(x+1)}{2x-1}=\dfrac{\log_2 2}{2\cdot 1-1}=\dfrac{1}{1}=1$.

В дальнейшем мы будем использовать следующие правила:

1. Если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b\neq 0$, то $f(x)\underset{x\to a}{\sim}b$.

2. Многочлен $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ при $x\to\infty$ эквивалентен своему старшему члену a_0x^n.

Например, $2x^4-x+7\underset{x\to\infty}{\sim}2x^4$; $5-x-4x^3\underset{x\to\infty}{\sim}-4x^3$.

3. ***Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - любые функции и пусть $\alpha(x)\underset{x\to a}{\sim}\alpha_1(x)$; $\beta(x)\underset{x\to a}{\sim}\beta_1(x)$.***

Тогда $$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)\cdot\alpha(x)}{g(x)\cdot\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)\cdot\alpha_1(x)}{g(x)\cdot\beta_1(x)}}.$$

Примеры:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(5x-1)^2(x+2)^3}{(3-2x)^5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(5x)^2\cdot x^3}{(-2x)^5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{25x^2x^3}{-32x^5}=-\dfrac{25}{32}$.

$\left|5x-1\underset{x\to\infty}{\sim}5x;\ x+2\underset{x\to\infty}{\sim}x;\ 3-2x\underset{x\to\infty}{\sim}-2x\right|$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+2}{2x-7}\right)^{3x-x^2}=\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+2}{2x-7}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}(3x-x^2)}=\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x}{2x}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}(-x^2)}=\left(\dfrac{5}{2}\right)^{-\infty}=0$.

$\left|5x+2\underset{x\to\infty}{\sim}5x;\ \ 2x-7\underset{x\to\infty}{\sim}2x;\ \ 3x-x^2\underset{x\to\infty}{\sim}-x^2\right|$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}tg\dfrac{\pi x^2+x}{5-3x^2}=tg\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi x^2+x}{5-3x^2}\right)=tg\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi x^2}{-3x^2}\right)=tg\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-tg\dfrac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

$\left|\pi x^2+x\underset{x\to\infty}{\sim}\pi x^2;\ 5-3x^2\underset{x\to\infty}{\sim}-3x^2\right|$.

В примерах 2 и 3 использовались правила 6 и 7 вычисления пределов.

•Упражнение 8

Найдите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-1)^3(5-x)^3}{x^2(3x+1)^4}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x+16x^4}{x^2+7}}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos\dfrac{x+3}{x^3-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}arctg\dfrac{0{,}1x^2+4{,}7x}{2{,}3x-0{,}56}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+\sqrt{x}}{x^5-x\sqrt{2}}\right)^{0{,}6+x^2\sqrt{6}}$.

Эквивалентны ли следующие функции:

6) $\alpha(x)=\dfrac{x}{3x^2-1}$ и $\beta(x)=\dfrac{3x^2}{x^3+2}$ при $x\to\infty$;

7) $f(x)=arctg\dfrac{x^2}{x+1}$ и $g(x)=\dfrac{3-\pi x}{2x+7}$ при $x\to-\infty$?

Разберите теорему о первом замечательном пределе по конспекту лекций, по [1, гл.II,§ 6] или [2, гл. III, § 3,9]. Из нее следует: $\sin x\sim x$ при $x\to 0$. Легко доказать, что при $x\to 0$ $tgx\sim x$; $arctgx\sim x$; $arcsinx\sim x$.

Теорема о первом замечательном пределе в обобщенном виде:

$$\boxed{\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1\Leftrightarrow\sin\alpha(x)\underset{\alpha(x)\to 0}{\sim}\alpha(x),}$$

где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при условии $x\to a$, α - конечно или бесконечно.

Таким образом, получаем следующий ряд эквивалентных бесконечно малых функций:

$$\boxed{\begin{gathered}\text{при } \alpha(x)\to 0\\ \alpha(x)\sim\sin\alpha(x)\sim tg\alpha(x)\sim arctg\alpha(x)\sim arcsin\alpha(x).\end{gathered}} \quad (1)$$

Примеры:

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sin(x-2\sqrt{x})}{x-4}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}.$

$$x-2\sqrt{x}\xrightarrow[x\to 4]{}0\Rightarrow \sin(x-2\sqrt{x})\underset{x\to 4}{\sim}x-2\sqrt{x}=\sqrt{x}(\sqrt{x}-2);$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{x+7}\cdot \operatorname{arctg}\dfrac{3}{x+3}=[\infty\cdot 0]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{x}\cdot\dfrac{3}{x}=6.$

$$\left|\begin{array}{l} x+7\underset{x\to\infty}{\sim}x; \quad \dfrac{2x^2}{x+7}\underset{x\to\infty}{\sim}\dfrac{2x^2}{x}=2x\underset{x\to\infty}{\to}\infty; \\ x+3\underset{x\to\infty}{\sim}x; \quad \left.\begin{array}{l}\dfrac{3}{x+3}\underset{x\to\infty}{\to}0; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{3}{x+3}\underset{x\to\infty}{\to}0\end{array}\right\}\operatorname{arctg}\dfrac{3}{x+3}\underset{x\to\infty}{\sim}\dfrac{3}{x+3}\underset{x\to\infty}{\sim}\dfrac{3}{x}.\end{array}\right.$$

• **Упражнение 9**

Используя эквивалентные функции, найдите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\arcsin 2x}}{2x+\sqrt{x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{\operatorname{tg}(x^2-9)}$; 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\sin\dfrac{x+2}{x^2-1}$.

Изучите теорему о втором замечательном пределе по конспекту лекций, [1, гл. II,§ 7] или [2, гл. III, § 3,9] .

На основании этой теоремы можно доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1;\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1.$

Теорема о втором замечательном пределе в обобщенном виде:

$$\boxed{\lim_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e}.$$

Эта теорема позволяет раскрыть неопределенность вида $[1^\infty]$, которая возникает при вычислении предела показательно-степенной функции $y=[u(x)]^{v(x)}$. Чтобы правильно использовать теорему, нужно основание $u(x)$ представить в виде суммы $1+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая, в показателе записать величину $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ и выполнить тождественные преобразования.

Примеры:

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{x}}=[1^\infty]=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{2x\cdot\frac{3}{x}}=\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}2x\cdot\frac{3}{x}}=e^6.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+3}\right)^{x+2}=[1^\infty]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{x+3}-1\right)^{x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{x-x-3}{x+3}\right)^{x+2}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-3}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-3}}\right]^{\frac{-3}{x+3}(x+2)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3(x+2)}{x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x}{x}}=e^{-3}\approx 0{,}05.$$

Обобщая все, изученное Вами о втором замечательном пределе, найдем, что

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{при } \alpha(x)\to 0 \\ \alpha(x)\sim\ln(1+\alpha(x))\sim(e^{\alpha(x)}-1).\end{array}} \qquad (2)$$

Используем этот результат для вычисления пределов.

Примеры:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1-\sqrt{x})}{\arcsin(x^2+4x)}=\left[\dfrac{\ln^2 1}{\arcsin 0}=\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(-\sqrt{x})^2}{x^2+4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x(x+4)}=\dfrac{1}{4}=0{,}25;$

$$\text{при } x\to 0\ \left.\begin{array}{l}-\sqrt{x}\to 0\\ \ln(1-\sqrt{x})\to 0\end{array}\right\}\Rightarrow \ln(1-\sqrt{x})=\ln(1+(-\sqrt{x}))\underset{x\to 0}{\sim}(-\sqrt{x});$$

$$\left.\begin{array}{l}x^2+4x\to 0\\ \arcsin(x^2+4x)\to 0\end{array}\right\}\Rightarrow \arcsin(x^2+4x)\underset{x\to 0}{\sim}(x^2+4x);$$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-3^{x-2}}{\sin\pi x}=\left[\dfrac{1-3^0}{\sin 2\pi}=\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-(x-2)\ln 3}{\pi(x-2)}=-\dfrac{\ln 3}{\pi}\approx -0{,}35.$

$\sin\pi x\underset{x\to 2}{\to}\sin 2\pi=0$, но $\pi x\to 2\pi$. Поэтому поступаем так :

$$\sin\pi x=\sin(\pi x-2\pi)=\sin\pi(x-2).$$

$$\text{Тогда при } x\to 2\ \left.\begin{array}{l}\pi(x-2)\to 0\\ \sin\pi(x-2)\to 0\end{array}\right\}\Rightarrow \sin\pi(x-2)\underset{x\to 2}{\sim}\pi(x-2).$$

$$a^u=e^{u\ln a};\ 3^{x-2}=e^{(x-2)\ln 3}.$$

Далее преобразуем: $1-3^{x-2}=1-e^{(x-2)\ln 3}=-\left[e^{(x-2)\ln 3}-1\right]\underset{x\to 2}{\sim}-[(x-2)\ln 3]$.

Замечание. Мы снова вернулись к неопределенностям $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, т. е. к отношению двух бесконечно малых функций. При раскрытии такой неопределенности следует выделить критический множитель. Но иногда прежде нужно заменить бесконечно малые функции более простыми, эквивалентными данным, используя соотношения (1) и (2).

• Упражнение 10

Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{1-x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{x}{x-1}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}(2+x)^{\frac{x}{x-1}}$;

4) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\ln(3+x)}{\operatorname{arctg}(4-x^2)}$; 5) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\operatorname{tg}x}{1-e^{\pi-x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{0.5x^2}$.

Раскрытие неопределенностей с помощью правила Лопиталя

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0}\text{ или }\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}.$$

Подробную формулировку теоремы читайте в конспекте лекций, в [1, гл. IV, § 4] или [2, гл. IV, § 4,13].

Примеры:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-5x}{\sin 3x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2-5x)'}{(\sin 3x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-5}{3\cos 3x}=\dfrac{2\cdot 0-5}{3\cos 0}=-\dfrac{5}{3}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\ln x}{2x+3}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+\ln x)'}{(2x+3)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{2}=\dfrac{1+\frac{1}{\infty}}{2}=\dfrac{1}{2}$.

<u>Замечания</u>

1. Если выражение $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x\to a$, так же как и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, представляет собой неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ или $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, то правило Лопиталя нужно применить еще один или несколько раз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^3+3x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^3+3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x^2+6x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(3x^2+6x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6x+6}=\frac{\cos 0}{6\cdot 0+6}=\frac{1}{6}.$$

2. Иногда правило Лопиталя не раскрывает неопределенности.

Например,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{2x+3}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x}+3)'}{(\sqrt{2x+3})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{2}{2\sqrt{2x+3}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x+3}}{2\sqrt{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{2\sqrt{2x+3}}}{\frac{2}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x+3}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\ldots$$

Как видим, процесс применения правила Лопиталя зацикливается, корни меняются местами. Такие пределы нужно вычислять ранее рассмотренными методами:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{2x+3}}=\left[2x+3\underset{x\to+\infty}{\sim}2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{2x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(1+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}}=\frac{1+0}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0{,}8.$$

3. Если существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный), то существует равный ему $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Если же $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ не существует, то это еще не означает, что не существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. В этом случае для его нахождения надо применять ранее изученные методы.

Например, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-\sin x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{1}=1-\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ не существует. Однако

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left[1-\frac{\sin x}{x}\right]=1-\frac{|\sin x|\le 1}{\infty}=1-0=1.$$

Правило Лопиталя оказывается полезным и в тех случаях, когда встречается разность эквивалентных функций:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg}x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\frac{1}{\cos^2 x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cos^2 x}{\cos^2 x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos^2 x}{\cos x+1}=-0{,}5.$$

Кроме того, правило Лопиталя позволяет раскрыть неопределенность, создаваемую трансцендентными функциями:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{\ln x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\ln 2}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}2^x\ln 2\cdot x=+\infty.$$

• Упражнение 11

Найдите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x-\sqrt{x}}{3-7x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-\sin\frac{\pi}{x}}{\cos\frac{\pi}{x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{x^3}$;

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{\operatorname{ctg}x}$; 5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$; 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2(3x-2)}{5x-7}$.

Правило Лопиталя может быть использовано и для устранения остальных видов неопределенностей:

а) $[\infty-\infty]$; $[0\cdot\infty]$.

В этих случаях путем тождественных преобразований нужно от разности или произведения перейти к дроби, чтобы получить $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, а затем применить правило Лопиталя.

Примеры:

1. $\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x = [0\cdot\infty] = \lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0+0}(-x) = 0.$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln x - \ln(2x^2+5)\right] = [\infty-\infty] = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{x}{2x^2+5} = \ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2x^2+5}\right) =$

$= \ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{4x}\right) = \ln(+0) = -\infty.$

б) $[1^\infty];[0^0];[\infty^0]$

Такие неопределенности дает показательно-степенная функция $y=[u(x)]^{v(x)}$. Преобразуем ее к показательной: $u^v = e^{\ln u^v} = e^{v\ln u}$.

Используя полученную формулу, покажите, что раскрытие этих трех неопределенностей фактически сводится к устранению неопределенности $[0\cdot\infty]$. Во всех случаях это достигается переходом к виду $e^{0\cdot\infty}$.

Пример:

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)^{\frac{2}{x+1}} = [\infty^0] = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{2}{x+2}\ln(x+1)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x+1)}{x+2}} =$

$$= \left[\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x+1)}{x+2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{x+1}}{1} = \frac{2}{\infty} = 0.\right] = e^0 = 1.$$

• Упражнение 12

Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot ctg5x$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot tg\dfrac{\pi x}{2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0+0}(\sin x)^{\frac{3}{\ln x}}$ 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{2x}$ 6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}-0}(ctgx)^{tg2x}$.

Примеры использования пределов в инженерных расчетах

При конструировании изделий инженер выбирает подходящий материал и рассчитывает необходимые размеры элементов конструкции, а также оценивает конструкцию на возможность выдерживать внешние воздействия.

В расчетах он применяет упрощенные схематизированные модели формы элементов конструкции. Одной из моделей формы является пластинка. Например, диски компрессоров и турбин двигателей, перекрытия и панели зданий рассматривают как пластинки, которые в процессе эксплуатации подвергаются локальным (сосредоточенным) или распределенным нагрузкам.

Приведем некоторые формулы, к которым инженеры приходят в подобных расчетах.

Задача 1. Круглая, защемленная по контуру пластина радиусом R находится под действием сосредоточенной силы P (рис.15). В результате действия этой силы пластина прогибается. Величина прогиба w в точках, находящихся на расстоянии r от центра пластины, выражается следующей формулой:

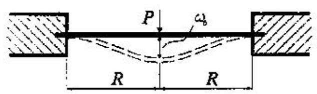


Рис. 15

$$w = P\cdot k\left[r^2\ln\frac{r}{R}+\frac{1}{2}(R^2-r^2)\right]. \qquad (3)$$

Здесь k - коэффициент, зависящий от характеристик материала пластины и ее толщины.

Для получения формулы прогиба w_0 в центре пластины, где $r=0$, нужно найти:

$$w_0 = \lim_{r\to 0} w = P\cdot\frac{kR^2}{2}.$$

Задача 2. Круглая пластина, опертая по двум концентрическим окружностям, равномерно загружена нагрузкой q по всей поверхности (рис. 16). Нагрузка P возникает в средней опоре как реакция на нагрузку q. Значение нагрузки P определяется по формуле

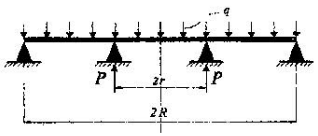


Рис. 16

$$P = q\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{k_1R^4-2k_2R^2r^2+r^4}{(R^2-r^2)\left(k_2-k_3\frac{r^2}{R^2}\right)+4r^2\ln\frac{r}{R}}. \qquad (4)$$

Здесь k_1, k_2, k_3 - характеристики материала пластинки.

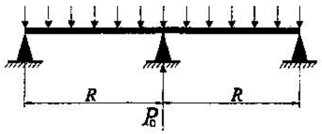


Рис. 17

Если пластина имеет опору в центре и по внешнему краю (окружности), то при $r \to 0$ из формулы (4) найдем выражение для усилия P_0 (рис. 17), возникающего в центральной опоре:

$$P_0 = \lim_{r \to 0} P = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{k_1}{k_2} R^2 q .$$

Формулы прогиба w_0 (задача 1) и усилия P_0 (задача 2) получите самостоятельно. Вычисляя пределы при $r \to 0$ в формулах (3) и (4), Вы встретитесь с $\lim\limits_{r \to 0} r^2 \cdot \ln \frac{r}{R} = \left[0 \cdot \ln \frac{0}{R} = 0 \cdot \infty \right]$, который найдите с помощью правила Лопиталя.

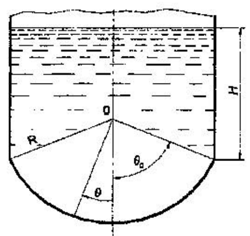


Рис. 18

Задача 3. Бак со сферическим днищем имеет форму, изображенную на рис. 19. Бак залит жидкостью с удельным весом γ. В днище бака от гидравлического давления возникают усилия, определяемые по формулам:

$$T_1 = \gamma H \frac{R}{2} \left[1 + \frac{R}{H} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta} - \cos \theta_0 \right) \right]; \qquad (5)$$

$$T_2 = \gamma H \frac{R}{2} \left[1 + \frac{R}{H} \left(2 \cos \theta - \cos \theta_0 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta} \right) \right]. \qquad (6)$$

Усилия T_1 и T_2 принимают максимальные значения в центре сферы O при $\theta = 0$; их можно получить путем перехода к пределу в формулах (5) и (6) при $\theta \to 0$. При этом в дробях получается неопределенность $\left[\frac{0}{0} \right]$, которую раскрываем по правилу Лопиталя.

Окончательно получим

$$(T_1)_{max} = \gamma H \frac{R}{2} \left[1 + \frac{R}{H} (1 - \cos \theta_0) \right] = (T_2)_{max} . \qquad (7)$$

Найдите формулу (7) самостоятельно.

Ответы

Упражнение 1

1) $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -2;\ \lim\limits_{x \to -3} g(x) = \lim\limits_{x \to 2} g(x) = 0;\ g(-\infty) = +\infty;\ g(+\infty) = 2.$

2) $\varphi(-\infty) = -2;\ \varphi(3-0) = +\infty;\ \varphi(3+0) = -2;\ \varphi(3) = -2;$
$\lim\limits_{x \to 3} \varphi(x)$ не $\exists$. $\lim \varphi(x) = 0$ при $x \to 0;$ при $x \to 4$ и при $x \to +\infty$

3) $1{,}75;\ -\frac{\pi}{4};\ 7;\ -108.$

4) $0;\ -1;\ 0;\ 0;\ +\infty;\ -\infty;$ *нет*; $0;\ +\infty;\ \frac{\pi}{2}.$

Упражнение 2

1) $0;$ 2) $+\infty;$ 3) $-\infty.$

Упражнение 3

1)Данные функции являются бесконечно малыми (последовательно) при условиях $x \to 0;\ x \to 1;\ x \to -\infty;\ (x \to 0, x \to -2)$ и бесконечно большими при $(x \to +\infty;\ x \to -\infty);\ \ (x \to 0+0;\ x \to +\infty);\ \ x \to +\infty;\ x \to \infty.$

2) $h(x);\ g(x);\ \alpha(x).$

Упражнение 4

1) $-\infty$; 2) ∞ ;3) ∞ ; 4) 0

Упражнение 5

1) $0;$ 2) $+\infty;$ 3) $-\infty;$ 4) $+\infty;$ 5) $1;$ 6) $0.$

Упражнение 6

1) $0;$ 2) $-\frac{54}{5};$ 3) ∞.

Упражнение 7

1) $+\infty$, 2) $tg\left(-\frac{3}{4}\right) = -tg 0{,}75 \approx -0{,}9316$, 3) $-\frac{\pi}{2}.$

Упражнение 8

1) $-\frac{1}{81}$, 2) $+\infty$, 3) 1, 4) $-\frac{\pi}{2}$, 5) 0, 6) *нет*, 7) *да*.

Упражнение 9

1) $\sqrt{2}$, 2) $\frac{1}{2}$, 3) $+\infty$.

Упражнение 10

1) e^{-2}, 2) e^{-1},

3)Этот предел не существует: $\lim\limits_{x \to 1-0} (2+x)^{\frac{x}{x-1}} = 3^{-\infty} = 0;\ \lim\limits_{x \to 1+0} (2+x)^{\frac{x}{x-1}} = 3^{+\infty} = +\infty.$

4) $0{,}25;$ 5) $1;$ 6) $1.$.

Упражнение 11

1) -5/7; 2) 0 ; 3) $\frac{1}{6}$; 4) 0; 5) $\cos a$; 6) 0.

Упражнение 12

1) -0,5; 2) 0,2; 3) $\frac{2}{\pi}$; 4) e^3; 5) 1; 6) e .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 1. М.: Наука, 1995.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1984.
3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике.Ч.1, М.: Айрис – пресс, 2004.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1. М.: Высшая школа, 1996.

Индивидуальное домашнее задание

В задачах 1-3 постройте эскизы графиков в окрестности предельных точек по заданным предельным функциям;

В задачах 4-15 вычислите пределы.

Вариант № 1

1. $\lim\limits_{x\to 5}\varphi(x)=2.$	2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=2;$ $\varphi(x)<2.$	3. $\varphi(1-0)=3;$ $\varphi(1+0)=-\infty.$
4. $\lim\limits_{x\to a}6^{2x+10};$ a) $a=-5;$ b) $a=+\infty;$ c) $a=-\infty.$	5. $\lim\limits_{x\to a}arctg(2x-1);$ a) $a=1;$ b) $a=+\infty;$ c) $a=-\infty.$	6. $\lim\limits_{x\to a}\lg(2x-3);$ a) $a=\frac{3}{2}+0;$ b) $a=+\infty.$
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{3x-x^2}{2x^2-5x-3};$ a) $a=3;$ b) $a=-\infty.$	8. $\lim\limits_{x\to a}\sin\frac{2}{1-x^2};$ a) $a=1;$ b) $a=+\infty.$	9. $\lim\limits_{x\to a}\frac{5x^2-10x}{2x-4};$ a) $a=2+0;$ b) $a=+\infty.$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\sqrt{x+2}-\sqrt{4x+1}\right)$	11. $\lim\limits_{x\to 15}\frac{\arcsin(x-15)}{\sin\sqrt{x-15}}.$	12. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{tg\left(1-x^2\right)}{\ln(6+5x)}.$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x+2}.$	14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+5}{2x}\right)^{x+2}.$	15. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-e^{1-x}}{x^2+2x-3}.$

Вариант № 2

1. $\lim\limits_{x\to-3}\varphi(x)=-5.$	2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=-3;$ $\varphi(x)>-3.$	3. $\varphi(-2-0)=-3;$ $\varphi(-2+0)=+\infty.$
4. $\lim\limits_{x\to a}arcctg(\pi-2x);$ a) $a=\frac{\pi}{2};$ b) $a=+\infty;$ c) $a=-\infty.$	5. $\lim\limits_{x\to a}\log_{0,5}(3x+5);$ a) $a=-\frac{5}{3}+0;$ b) $a=+\infty.$	6. $\lim\limits_{x\to a}2^{8-x};$ a) $a=4;$ b) $a=+\infty;$ c) $a=-\infty.$
7. $\lim\limits_{x\to a}\sin\frac{2x}{4-x^2};$ a) $a=2-0;$ b) $a=+\infty.$	8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2+2x-8}{x+4};$ a) $a=-4;$ b) $a=+\infty.$	9. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-9}{2x^2+5x-3};$ a) $a=3;$ b) $a=+\infty.$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\sqrt{x+2}-\sqrt{4x+1}\right)$	11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^5}{\arcsin\left(x^2-6x\right)}.$	12. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\ln(x+3)}{\sqrt{arctg(x+2)}}.$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x}{8x+3}\right)^{x^2+1}.$	14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{x+2}.$	15. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{2x^2-4x-16}{1-e^{x+2}}.$

Вариант № 3

1. $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=3.$	2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=7;$ $\varphi(x)<7.$	3. $\varphi(1-0)=-5;$ $\varphi(1+0)=+\infty.$
4. $\lim\limits_{x\to a}\ln(x-14);$ a) $a=14+0;$ b) $a=+\infty.$	5. $\lim\limits_{x\to a}\pi^{\frac{5}{x-3}};$ a) $a=+\infty;$ b) $a=3-0;$ c) $a=3+0.$	6. $\lim\limits_{x\to a}arctg\frac{5}{7-x};$ a) $a=-\infty;$ b) $a=7-0;$ c) $a=7+0.$
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x+5}{3x^2+14x-5};$ a) $a=-5;$ b) $a=+\infty.$	8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-16}{\sqrt{x+4}};$ a) $a=-4+0;$ b) $a=+\infty.$	9. $\lim\limits_{x\to a}tg\frac{2x-4}{x+3};$ a) $a=-3-0;$ b) $a=-\infty.$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(7\sqrt{x+5}-2\sqrt{x+1}\right)$	11. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\arcsin^2(\sqrt{3}-\sqrt{x})}{tg(x-3)^2}.$	12. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(3-x)}{\sin\left(x^2-4\right)}.$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{3x}\right)^{3-x^2}.$	14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-3}\right)^{2x}.$	15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x+\sqrt{x}}.$

Вариант № 4

1. $\lim\limits_{x\to 2}\varphi(x)=7.$	2. $\lim\limits_{x\to -\infty}\varphi(x)=0;$ $\varphi(x)>0.$	3. $\varphi(-1-0)=+\infty;$ $\varphi(-1+0)=-\infty.$
4. $\lim\limits_{x\to a}4^{\frac{8}{x^2-4}}$; a) $a=+\infty$; b) $a=2+0$; c) $a=2-0$.	5. $\lim\limits_{x\to a}\log_5(3+x)$; a) $a=-3+0$; b) $a=+\infty$.	6. $\lim\limits_{x\to a} arcctg(2x-1)$; a) $a=0{,}5$; b) $a=+\infty$; c) $a=-\infty$.
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{3x^2-14x-5}{25-x^2}$; a) $a=5$; b) $a=-\infty$.	8. $\lim\limits_{x\to a}\sin\frac{7}{x^3-8}$; a) $a=2$; b) $a=+\infty$.	9. $\lim\limits_{x\to a}\frac{81-x^4}{2x^2-18}$; a) $a=3$; b) $a=+\infty$.
10. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x}-9\sqrt{x+3}\right)$	11. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\arcsin\left(25-x^2\right)}{tg\left(10-2x\right)}$.	12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\sin x^5}\cdot arctgx^3$.
13. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{3x+5}{x+1}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.	14. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x-3}{x-4}\right)^{3-3x}$.	15. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{3x^2-2x-40}{1-e^{4-x}}$.

Вариант № 5

1. $\lim\limits_{x\to 3}\varphi(x)=0.$	2. $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=+\infty;$ $\varphi(x)<2.$	3. $\varphi(3-0)=0;$ $\varphi(3+0)=+\infty.$
4. $\lim\limits_{x\to a}\log_{\frac{1}{3}}(4x-5)$; a) $a=\frac{5}{4}+0$; b) $a=+\infty$.	5. $\lim\limits_{x\to a} arctg(6x+5)$; a) $a=-1$; b) $a=+\infty$; c) $a=-\infty$.	6. $\lim\limits_{x\to a}8^{x^3+x}$; a) $a=1$; b) $a=+\infty$; c) $a=-\infty$.
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{(2+x)^2+4+2x}{2+x}$; a) $a=-2+0$; b) $a=+\infty$.	8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x+7}}{x^2-49}$; a) $a=-7+0$; b) $a=+\infty$.	9. $\lim\limits_{x\to a}\frac{3x^2-x}{3x^2+14x-5}$; a) $a=\frac{1}{3}$; b) $a=+\infty$.
10. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{5x+6}-\sqrt{x+6}\right)$	11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^3)}{\sin\left(x^2+x\right)}$.	12. $\lim\limits_{x\to 16}\frac{\arcsin^3\left(\sqrt{x}-4\right)}{tg(x-16)}$.
13. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{6x}{7x-3}\right)^{x^3}$.	14. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x}{x+3}\right)^{4x+4}$.	15. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1-e^{x-2}}{x^2+5x-14}$.

Вариант № 6

1. $\lim\limits_{x\to -1}\varphi(x)=4.$	2. $\lim\limits_{x\to -\infty}\varphi(x)=3;$ $\varphi(x)>3.$	3. $\varphi(-3-0)=0;$ $\varphi(-3+0)=+\infty.$
4. $\lim\limits_{x\to a}\log_6(5-3x)$; a) $a=\frac{5}{3}-0$; b) $a=-\infty$.	5. $\lim\limits_{x\to a} arcctg(2-7x)$; a) $a=\frac{1}{7}$; b) $a=+\infty$; c) $a=-\infty$.	6. $\lim\limits_{x\to a}e^{9-x^3}$; a) $a=2$; b) $a=+\infty$; c) $a=-\infty$.
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{2x+3}-2}{1-2x}$; a) $a=\frac{1}{2}$; b) $a=+\infty$.	8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{2x^2-5x-3}{4x^2+2x}$; a) $a=-\frac{1}{2}$; b) $a=+\infty$.	9. $\lim\limits_{x\to a}\sin\frac{81-x^2}{\sqrt{x}-9}$; a) $a=9+0$; b) $a=+\infty$.
10. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+1}\right)$	11. $\lim\limits_{x\to 25}\frac{\arcsin(x-25)^2}{\sin\left(5-\sqrt{x}\right)}$.	12. $\lim\limits_{x\to 12}\frac{\ln(49-4x)}{tg\left(x^2-144\right)}$.
13. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{7x-2}{5x-4}\right)^{x^2+1}$.	14. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x+4}{x}\right)^{5x-6}$.	15. $\lim\limits_{x\to -4}\frac{2x^2+3x-20}{1-e^{4+x}}$.

Вариант № 7

1. $\lim\limits_{x\to -5}\varphi(x)=0.$	2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\varphi(x)=1;$ $\varphi(x)<1.$	3. $\varphi(1-0)=-\infty;$ $\varphi(1+0)=3.$
4. $\lim\limits_{x\to a}9^{\frac{10}{x+3}}$; a) $a=-3+0$; b) $a=-3-0$; c) $a=+\infty$.	5. $\lim\limits_{x\to a}\log_{0,5}\left(x^3-1\right)$; a) $a=1+0$; b) $a=+\infty$.	6. $\lim\limits_{x\to a} arctg(3-x)$; a) $a=2$; b) $a=+\infty$; c) $a=-\infty$.
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{(8+x)^3+24+3x}{8+x}$; a) $a=-8$; b) $a=-\infty$.	8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x+6}}{x^2-36}$; a) $a=-6+0$; b) $a=+\infty$.	9. $\lim\limits_{x\to a}\sin\frac{3-x}{x+11}$; a) $a=-11-0$; b) $a=+\infty$.
10. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{8x-27}-7\sqrt{x+5}\right)$	11. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{tg(x-4)}{\arcsin\left(4x^2-x-60\right)}$.	12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg\left(x^3+5x^2\right)}{\ln\left(1+x^5-3x^4\right)}$.
13. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{10x-4}{12x}\right)^{1-x}$.	14. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x-5}{x-2}\right)^{4-x}$.	15. $\lim\limits_{x\to -5}\frac{1-e^{x+5}}{x^2+6x+5}$.

Вариант № 8

1. $\lim\limits_{x\to 5}\varphi(x)=-1.$	2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=-2;$ $\varphi(x)>-2.$	3. $\varphi(-2-0)=-\infty;$ $\varphi(-2+0)=3.$
4. $\lim\limits_{x\to a}\ln(3-7x);$ a) $a=-\infty;$ b) $a=\frac{3}{7}-0.$	5. $\lim\limits_{x\to a}10^{\frac{3}{6-2x}};$ a) $a=-\infty;$ b) $a=3-0;$ c) $a=3+0.$	6. $\lim\limits_{x\to a} arcctg(2x-3);$ a) $a=1;$ b) $a=+\infty;$ c) $a=-\infty.$
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{2x-1}{2x^2+5x-3};$ a) $a=0{,}5;$ b) $a=+\infty.$	8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{121-x^2}{\sqrt{11+x}};$ a) $a=-11+0;$ b) $a=+\infty.$	9. $\lim\limits_{x\to a} tg\frac{x+1}{4-x};$ a) $a=4+0;$ b) $a=+\infty.$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x+2}-\sqrt{6x+1}\right).$	11. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sin\left(4-x^2\right)}{arctg(10x+20)}.$	12. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{tg\left(\sqrt{x}-\sqrt{7}\right)}{\arcsin(x-7)}.$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5x}{4x+5}\right)^{2-x^2}.$	14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-4}\right)^{2-6x}.$	15. $\lim\limits_{x\to-6}\frac{1-e^{x+6}}{2x^2+4x-48}.$

Вариант № 9

1. $\lim\limits_{x\to-2}\varphi(x)=-7.$	2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=4;$ $\varphi(x)<4.$	3. $\varphi(5-0)=4;$ $\varphi(5+0)=-\infty.$
4. $\lim\limits_{x\to a}4^{8x-5};$ a) $a=1;$ b) $a=+\infty;$ c) $a=-\infty.$	5. $\lim\limits_{x\to a} arctg\left(3-\frac{x}{2}\right);$ a) $a=4;$ b) $a=+\infty;$ c) $a=-\infty.$	6. $\lim\limits_{x\to a}\log_{15}(3-x);$ a) $a=3-0;$ b) $a=-\infty.$
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-5x}{4x^2-21x+5};$ a) $a=5;$ b) $a=-\infty.$	8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x-6+(x-6)^2}{\sqrt{x-6}};$ a) $a=6+0;$ b) $a=+\infty.$	9. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x-2}}{4-x^2};$ a) $a=2+0;$ b) $a=+\infty.$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4\sqrt{x-4}-2\sqrt{x-3}\right).$	11. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{tg\left(x^2-9\right)}{\arcsin(9-3x)}.$	12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2-2x^3\right)}{\ln\left(1+x^3-x^4\right)}.$
13. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{6x+1}\right)^{1+x^3}.$	14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{3+x}.$	15. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{4x^2+5x-21}{1-e^{x+3}}.$

Вариант № 10

1. $\lim\limits_{x\to 4}\varphi(x)=-1.$	2. $\lim\limits_{x\to 3}\varphi(x)=-\infty.$	3. $\varphi(-0)=4;$ $\varphi(+0)=-\infty.$
4. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{2}\right)^{8-x};$ a) $a=9;$ b) $a=+\infty;$ c) $a=-\infty.$	5. $\lim\limits_{x\to a} arcctg\left(\frac{x}{2}+1\right);$ a) $a=0;$ b) $a=+\infty;$ c) $a=-\infty.$	6. $\lim\limits_{x\to a}\log_8\left(\frac{2}{3}-x\right);$ a) $a=\frac{2}{3}-0;$ b) $a=-\infty.$
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{9+3x}-1}{8+3x};$ a) $a=-\frac{8}{3};$ b) $a=+\infty.$	8. $\lim\limits_{x\to a}\sin\frac{8-x}{x-3};$ a) $a=3+0;$ b) $a=+\infty.$	9. $\lim\limits_{x\to a}\frac{4x^2-21x+5}{1-4x};$ a) $a=\frac{1}{4};$ b) $a=-\infty.$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(12\sqrt{x+8}-\sqrt{11x+8}\right).$	11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x^2}{tg\left(2x^3-x^4\right)}.$	12. $\lim\limits_{x\to-5}\frac{\arcsin\left(x^2-25\right)}{\ln(6+x)}.$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-7}{x-2}\right)^{\frac{1}{x+1}}.$	14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x+5}\right)^{1+3x}.$	15. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{1-e^{x-7}}{x^2-6x-7}.$

Вариант № 11

1. $\lim\limits_{x\to-5}\varphi(x)=2.$	2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=+\infty.$	3. $\varphi(1-0)=+\infty;$ $\varphi(1+0)=4.$
4. $\lim\limits_{x\to a}7^{3x^3+x};$ a) $a=1;$ b) $a=+\infty;$ c) $a=-\infty.$	5. $\lim\limits_{x\to a}\ln(10-6x);$ a) $a=-\infty;$ b) $a=\frac{5}{3}-0.$	6. $\lim\limits_{x\to a} tg(\pi-x);$ a) $a=\frac{\pi}{4};$ b) $a=\frac{\pi}{2}-0;$ c) $a=\frac{\pi}{2}+0.$
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x+6}}{x^2-36};$ a) $a=-6+0;$ b) $a=+\infty.$	8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{4x^2-19x-5}{4x+1};$ a) $a=-\frac{1}{4};$ b) $a=-\infty.$	9. $\lim\limits_{x\to a} arctg\frac{\sqrt{3}x}{x+6};$ a) $a=+\infty;$ b) $a=-6+0.$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{12x-17}-\sqrt{15x+7}\right).$	11. $\lim\limits_{x\to-9}\frac{\arcsin(x^2-81)}{\ln(2x+19)}.$	12. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{arctg(x-4)}{\sin\sqrt{2x-8}}.$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{2x}\right)^{-\frac{1}{x^3}}.$	14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{x+1}\right)^{2-x}.$	15. $\lim\limits_{x\to 8}\frac{e^{x-8}-1}{2x^2-4x-96}.$

Вариант № 12

1. $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=-3.$	2. $\lim\limits_{x\to -4}\varphi(x)=+\infty;$	3. $\varphi(3-0)=+\infty;$ $\varphi(3+0)=-2.$
4. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{3}\right)^{4-7x};$ a) $a=1$; b) $a=+\infty$; c) $a=-\infty$.	5. $\lim\limits_{x\to a}\log_{\pi}(2-3x);$ a) $a=\frac{2}{3}-0$; b) $a=-\infty$.	6. $\lim\limits_{x\to a} tg\left(x-\frac{\pi}{2}\right);$ a) $a=\frac{\pi}{4}$; b) $a=\pi+0$; c) $a=\pi-0$.
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{(9+x)^3}+27+3x}{9+x};$ a) $a=-9+0$; b) $a=+\infty$.	8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{1-16x^2}{4x^2-21x+5};$ a) $a=0{,}25$; b) $a=-\infty$.	9. $\lim\limits_{x\to a}\sin\frac{x-2}{x^2+2x-8};$ a) $a=2$; b) $a=+\infty$.
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5x+13}-6\sqrt{x+8}\right).$	11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2+9x^5\right)}{tg\left(x^3+3x^4\right)}.$	12. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\ln(x-2)}{\arcsin\left(x^2+2x-15\right)}.$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^{2x+4}.$	14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{8x}{10x-3}\right)^{-\frac{1}{x^2}}.$	15. $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^2+8x+15}{1-e^{x+5}}.$

Вариант № 13

1. $\lim\limits_{x\to -7}\varphi(x)=-2.$	2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=-\infty;$	3. $\varphi(5-0)=+\infty;$ $\varphi(5+0)=-3$
4. $\lim\limits_{x\to a} arctg\left(x^3-2\right);$ a) $a=1$; b) $a=+\infty$; c) $a=-\infty$.	5. $\lim\limits_{x\to a} 3^{\frac{4}{x^2-9}};$ a) $a=+\infty$; b) $a=3+0$; c) $a=3-0$.	6. $\lim\limits_{x\to a}\ln\left(x^2-4\right);$ a) $a=2+0$; b) $a=-\infty$.
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x-7}}{49-x^2};$ a) $a=7+0$; b) $a=+\infty$.	8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{4x^2-19x-5}{5-x};$ a) $a=5$; b) $a=-\infty$.	9. $\lim\limits_{x\to a}\arcsin\frac{\sqrt{3}x+1}{2x+2};$ a) $a=0$; b) $a=+\infty$.
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(8\sqrt{x+19}-20\sqrt{x+1}\right).$	11. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{tg(x-1)}{\sin\left(5x^2-6x+1\right)}.$	12. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\ln\left(50-x^2\right)}{arctg(21-3x)}.$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{7x+4}\right)^{x+2}.$	14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-6}{x-4}\right)^{5-3x}.$	15. $\lim\limits_{x\to 6}\frac{x^2+6x-72}{e^{6-x}-1}.$

Вариант № 14

1. $\lim\limits_{x\to -1}\varphi(x)=4.$	2. $\lim\limits_{x\to -\infty}\varphi(x)=3;$ $\varphi(x)<3.$	3. $\varphi(-4-0)=2;$ $\varphi(-4+0)=+\infty.$
4. $\lim\limits_{x\to a}\log_7(9+7x);$ a) $a=-\frac{9}{7}+0$; b) $a=+\infty$.	5. $\lim\limits_{x\to a} arcctg\left(x-2\sqrt{3}\right);$ a) $a=3\sqrt{3}$; b) $a=+\infty$; c) $a=-\infty$.	6. $\lim\limits_{x\to a} 4^{8-x};$ a) $a=5$; b) $a=+\infty$; c) $a=-\infty$.
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x+9}}{x^2-81};$ a) $a=-9+0$; b) $a=+\infty$.	8. $\lim\limits_{x\to a}\sin\frac{\pi x-15}{2x-8};$ a) $a=4-0$; b) $a=+\infty$.	9. $\lim\limits_{x\to a}\frac{4x^3+21x^2+5x}{3x^2+14x-5};$ a) $a=-5$; b) $a=+\infty$.
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(15\sqrt{x-3}-\sqrt{19x+6}\right).$	11. $\lim\limits_{x\to -4}\frac{tg(16+4x)}{\sin\left(16-x^2\right)}.$	12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x^3}{8x^2+0{,}5x}.$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5x}{3x+2}\right)^{2-x}.$	14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-2}\right)^{x-2}.$	15. $\lim\limits_{x\to -6}\frac{e^{6+x}-1}{x^2+8x-12}.$

Вариант № 15

1. $\lim\limits_{x\to -2}\varphi(x)=0.$	2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=-2;$ $\varphi(x)>-2.$	3. $\varphi(4-0)=-\infty;$ $\varphi(4+0)=+\infty.$
4. $\lim\limits_{x\to a}\log_{\frac{1}{3}}\left(3-\frac{x}{2}\right);$ a) $a=6-0$; b) $a=-\infty$.	5. $\lim\limits_{x\to a} 2^{7x+5};$ a) $a=-1$; b) $a=+\infty$; c) $a=-\infty$.	6. $\lim\limits_{x\to a} arctg\frac{3}{x-14};$ a) $a=+\infty$; b) $a=14+0$; c) $a=14-0$.
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{4x^2+21x+5}{5x+x^2};$ a) $a=-5$; b) $a=+\infty$.	8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x-10}}{100-x^2};$ a) $a=10+0$; b) $a=+\infty$.	9. $\lim\limits_{x\to a}\frac{3+x}{\sqrt{6+x}-\sqrt{3}};$ a) $a=-3$; b) $a=+\infty$.
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x-5}-7\sqrt{x-1}\right).$	11. $\lim\limits_{x\to -9}\frac{tg(x+9)}{\sin\left(x^2+x-72\right)}.$	12. $\lim\limits_{x\to -4}\frac{\arcsin\left(x^2-16\right)}{\ln(x+5)}.$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{7x+5}{9x-3}\right)^{\frac{1}{x}+2}.$	14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+7}{x+8}\right)^{7x-3}.$	15. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2x^2-3x-77}{e^{7-x}-1}.$

Вариант № 16

1. $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=-1.$	2. $\lim\limits_{x\to -\infty}\varphi(x)=+\infty;$	3. $\varphi(3-0)=+\infty;$ $\varphi(3+0)=-\infty.$
4. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-3x};$ a) $a=1;$ b) $a=+\infty;$ c) $a=-\infty.$	5. $\lim\limits_{x\to a} ctg(2\pi-x);$ a) $a=\frac{3\pi}{2};$ b) $a=\pi-0;$ c) $a=\pi+0.$	6. $\lim\limits_{x\to a}\ln(x+6);$ a) $a=-6+0;$ b) $a=+\infty.$
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{6x^2-x-1}{2x-1};$ a) $a=0,5;$ b) $a=-\infty.$	8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{11+x}}{x^2-121};$ a) $a=-11+0;$ b) $a=+\infty.$	9. $\lim\limits_{x\to a} tg\frac{7+x}{15-x};$ a) $a=15+0;$ b) $a=+\infty.$
10. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{11x-21}-\sqrt{6x+5}\right).$	11. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\arcsin\left(4-x^2\right)}{tg(4x+8)}$	12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin\left(2x^2+9x\right)}.$
13. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{6x-4}{2x-1}\right)^{x^2}.$	14. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{6-x}.$	15. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{e^{x-2}-1}{2x^2+5x-18}.$

Вариант № 17

1. $\lim\limits_{x\to 4}\varphi(x)=-2.$	2. $\lim\limits_{x\to -\infty}\varphi(x)=-3;$ $\varphi(x)\leqslant -3.$	3. $\varphi(-2-0)=-\infty;$ $\varphi(-2+0)=0.$
4. $\lim\limits_{x\to a} 8^{x^3+x};$ a) $a=-1;$ b) $a=+\infty;$ c) $a=-\infty.$	5. $\lim\limits_{x\to a} arctg(2x-\sqrt{3});$ a) $a=\sqrt{3};$ b) $a=+\infty;$ c) $a=-\infty.$	6. $\lim\limits_{x\to a}\log_2\left(\frac{x}{3}+5\right);$ a) $a=-15+0;$ b) $a=+\infty.$
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{9x+3}{6x^2-x-1};$ a) $a=-\frac{1}{3};$ b) $a=-\infty.$	8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{(2x+6)^3-4x-12}{2x+6};$ a) $a=-3+0;$ b) $a=+\infty.$	9. $\lim\limits_{x\to a}\sin\frac{8+x}{x+12};$ a) $a=-12-0;$ b) $a=+\infty.$
10. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(8\sqrt{x+2}-2\sqrt{x-3}\right).$	11. $\lim\limits_{x\to -4}\frac{\ln(x+5)}{arctg\left(3x^2+5x-28\right)}.$	12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^{10}+5x^{12}\right)}{\arcsin 6x^3}.$
13. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x+8}{3x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$	14. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x}{x+6}\right)^{1-5x}.$	15. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-1}{e^{x+1}-1}.$

Вариант № 18

1. $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)=7.$	2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\varphi(x)=-2;$ $\varphi(x)<-2.$	3. $\varphi(-1-0)=+\infty;$ $\varphi(-1+0)=0.$
4. $\lim\limits_{x\to a}\log_{0,5}(5-6x);$ a) $a=\frac{5}{6}-0;$ b) $a=-\infty.$	5. $\lim\limits_{x\to a} arcctg(2x+\sqrt{3});$ a) $a=-\sqrt{3};$ b) $a=-\infty.$	6. $\lim\limits_{x\to a} e^{\frac{1}{x^3-8}};$ a) $a=+\infty;$ b) $a=2-0;$ c) $a=2+0.$
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{4-x}{2-\sqrt{x}};$ a) $a=4;$ b) $a=+\infty.$	8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{2x^2+5x-3}{6x^2-x-1};$ a) $a=0,5;$ b) $a=+\infty.$	9. $\lim\limits_{x\to a}\sin\frac{\sqrt{x+12}}{x^2-144};$ a) $a=-12+0;$ b) $a=+\infty.$
10. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(7\sqrt{x+6}-\sqrt{3x+4}\right).$	11. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{arctg\left(2x^2-6x-56\right)}{\arcsin(x-7)}.$	12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(7x^3+8x^9\right)}{\ln\left(1+9x^3\right)}.$
13. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2x-7}{x+1}\right)^{1-x}.$	14. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x+8}{x-3}\right)^{\frac{x}{2}+2}.$	15. $\lim\limits_{x\to 9}\frac{e^{9-x}-1}{3x^2+9x-324}.$

Вариант № 19

1. $\lim\limits_{x\to 6}\varphi(x)=0.$	2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\varphi(x)=5;$ $\varphi(x)>5.$	3. $\varphi(3-0)=0;$ $\varphi(3+0)=-\infty.$
4. $\lim\limits_{x\to a}\log_3(12-4x);$ a) $a=3-0;$ b) $a=-\infty.$	5. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{4}\right)^{3-x};$ a) $a=2;$ b) $a=+\infty;$ c) $a=-\infty.$	6. $\lim\limits_{x\to a} arctg\left(x+\frac{\pi}{2}\right);$ a) $a=-\frac{\pi}{4};$ b) $a=+\infty;$ c) $a=-\infty.$
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{6x^2+x-1}{3x^2-16x+5};$ a) $a=\frac{1}{3};$ b) $a=+\infty.$	8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x-8}}{64-x^2};$ a) $a=8+0;$ b) $a=+\infty.$	9. $\lim\limits_{x\to a}\sin\frac{3x^2+10x+3}{x+3};$ a) $a=-3;$ b) $a=+\infty.$
10. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{6x+13}-9\sqrt{x+2}\right).$	11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^3+3x^8\right)}{tg\left(2x^9+x^{10}\right)}.$	12. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\arcsin\left(49-x^2\right)}{\ln(50-7x)}.$
13. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{4x}{7x+2}\right)^{x^2-1}.$	14. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x-6}{x+2}\right)^{x+0,5}.$	15. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2+10x-48}{e^{x-3}-1}.$

Вариант № 20

1. $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=-5.$	2. $\lim\limits_{x\to 5}\varphi(x)=+\infty.$	3. $\varphi(1-0)=+\infty;$ $\varphi(1+0)=0.$
4. $\lim\limits_{x\to a} ctg(4\pi-x);$ a) $a=3\pi-0;$ b) $a=3\pi+0;$ c) $a=\frac{\pi}{2}.$	5. $\lim\limits_{x\to a} 2^{\frac{15}{2-x}};$ a) $a=2-0;$ b) $a=2+0;$ c) $a=+\infty.$	6. $\lim\limits_{x\to a}\log_{\frac{1}{3}}(5-x);$ a) $a=5-0;$ b) $a=-\infty.$
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{3x^2+16x+5}{4x^2+21x+5};$ a) $a=-5;$ b) $a=+\infty.$	8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x+20}}{x^2-400};$ a) $a=-20+0;$ b) $a=+\infty.$	9. $\lim\limits_{x\to a} tg\frac{1-x^2}{1+x};$ a) $a=-1;$ b) $a=-\infty.$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{14x-5}-\sqrt{25x+7}\right)$	11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(2x^4+x^3\right)}{arctg\left(5x^2+x\right)}.$	12. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{\arcsin(x-3)}}{\ln(x-2)}.$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+1}{2x-3}\right)^{-\frac{1}{x^3}+1}.$	14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-4}\right)^{2-2x}.$	15. $\lim\limits_{x\to -8}\frac{e^{x+8}-1}{x^2-7x-120}.$

Вариант № 21

1. $\lim\limits_{x\to 4}\varphi(x)=4.$	2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=4;$ $\varphi(x)<4.$	3. $\varphi(5-0)=3;$ $\varphi(5+0)=-2.$
4. $\lim\limits_{x\to a} 2^{2x+9};$ a) $a=+\infty;$ b) $a=-\infty;$ c) $a=-4.$	5. $\lim\limits_{x\to a} arctg(6x-2\sqrt{3});$ a) $a=\frac{\sqrt{3}}{2};$ b) $a=+\infty;$ c) $a=-\infty.$	6. $\lim\limits_{x\to a}\log_{0,1}(2x+1);$ a) $a=-\frac{1}{2}+0;$ b) $a=+\infty.$
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{3x^2+14x-5}{3x^2+16x+5};$ a) $a=-5;$ b) $a=+\infty.$	8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{900-x^2}{\sqrt{x-30}};$ a) $a=30+0;$ b) $a=+\infty.$	9. $\lim\limits_{x\to a}\arcsin\frac{1+x}{x^2-1};$ a) $a=-1;$ b) $a=+\infty.$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(13\sqrt{x-3}-16\sqrt{x-1}\right)$	11. $\lim\limits_{x\to -5}\frac{5x^2-x-130}{acrtg(x+5)}.$	12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x^7}{\sin\left(2x^8+3x^{15}\right)}.$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{4x-1}\right)^{-x^3+1}.$	14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+7}{x+9}\right)^{4-8x}.$	15. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{e^{4-x}-1}{3x^2-5x-28}.$

Вариант № 22

1. $\lim\limits_{x\to 3}\varphi(x)=-3.$	2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=-1;$ $\varphi(x)>-1.$	3. $\varphi(-2-0)=-1;$ $\varphi(-2+0)=5.$
4. $\lim\limits_{x\to a} arcctg(x-\sqrt{3});$ a) $a=2\sqrt{3};$ b) $a=+\infty;$ c) $a=-\infty.$	5. $\lim\limits_{x\to a}\log_3\left(10-\frac{x}{5}\right);$ a) $a=50-0;$ b) $a=-\infty.$	6. $\lim\limits_{x\to a} 4^{\frac{1}{3-x}};$ a) $a=3+0;$ b) $a=3-0;$ c) $a=+\infty.$
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{2x}-\sqrt{3}}{2x-3};$ a) $a=\frac{3}{2};$ b) $a=+\infty.$	8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{2x^2-10x-12}{x-6};$ a) $a=6;$ b) $a=-\infty.$	9. $\lim\limits_{x\to a} arctg\frac{\sqrt{3}x-2}{x-7};$ a) $a=7-0;$ b) $a=+\infty.$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(20\sqrt{x-14}-\sqrt{25x-8}\right)$	11. $\lim\limits_{x\to -5}\frac{\ln(11+2x)}{\arcsin\left(25-x^2\right)}.$	12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\left(x^2+3x^5\right)}{\sin\left(2x^2+6x^4\right)}.$
13. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x}{2x+1}\right)^{-x^3+1}.$	14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-8}{x-10}\right)^{2x+1}.$	15. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{3x^2+7x-110}{e^{5-x}-1}.$

Вариант № 23

1. $\lim\limits_{x\to -3}\varphi(x)=7.$	2. $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)=+\infty.$	3. $\varphi(3-0)=-7;$ $\varphi(3+0)=0.$
4. $\lim\limits_{x\to a} 6^{10+8x};$ a) $a=-1;$ b) $a=-\infty;$ c) $a=+\infty.$	5. $\lim\limits_{x\to a} tg\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right);$ a) $a=1+0;$ b) $a=1-0;$ c) $a=+\infty.$	6. $\lim\limits_{x\to a}\lg(9-3x);$ a) $a=-\infty;$ b) $a=3-0.$
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x-14}}{196-x^2};$ a) $a=14+0;$ b) $a=+\infty.$	8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{4x^2+5x-6}{x+2};$ a) $a=-2;$ b) $a=+\infty.$	9. $\lim\limits_{x\to a}\sin\frac{\pi x}{x+5};$ a) $a=-5+0;$ b) $a=+\infty.$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{15x+2}-30\sqrt{x+3}\right)$	11. $\lim\limits_{x\to -8}\frac{\arcsin(x+8)}{arctg\left(x^2+4x-32\right)}.$	12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+3x^7\right)}{\sin\left(2x^4+5x^5\right)}.$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+8}{10x+3}\right)^{x}.$	14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+7}\right)^{6x-3}.$	15. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-e^{x-1}}{2x^2-3x+1}.$

Вариант № 24

1. $\lim\limits_{x\to-6}\varphi(x)=-1.$	2. $\lim\limits_{x\to7}\varphi(x)=-\infty.$	3. $\varphi(-3-0)=5;$ $\varphi(-3+0)=0.$
4. $\lim\limits_{x\to a}3^{\frac{5}{6-x}}$; a) $a=6-0$; b) $a=6+0$; c) $a=+\infty$.	5. $\lim\limits_{x\to a}\log_{0,4}(x-3)$; a) $a=3+0$; b) $a=+\infty$.	6. $\lim\limits_{x\to a}arctg(7x-8)$; a) $a=1$; b) $a=+\infty$; c) $a=-\infty$.
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x+40}}{x^2-1600}$; a) $a=-40+0$; b) $a=+\infty$.	8. $\lim\limits_{x\to a}tg\frac{x+3}{12-x}$; a) $a=12-0$; b) $a=+\infty$.	9. $\lim\limits_{x\to a}\frac{6x^2-19x+3}{2x-6}$; a) $a=3$; b) $a=-\infty$.
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{25x+1}-\sqrt{32x-9}\right)$	11. $\lim\limits_{x\to8}\frac{\sin^2\left(2\sqrt{2}-\sqrt{x}\right)}{\ln(x-7)}$	12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-9}{x}\right)^{-x}$.
13 $\lim\limits_{x\to\infty}tg\frac{5}{(x+2)^2}\cdot\frac{1}{\arcsin\frac{4}{(x+4)^4}}$.	14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+6}{x-3}\right)^{2-x}$.	15. $\lim\limits_{x\to-6}\frac{x^2+9x+18}{e^{x+6}-1}$.

Вариант № 25

1. $\lim\limits_{x\to1}\varphi(x)=5.$	2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty;$	3. $\varphi(6-0)=0;$ $\varphi(6+0)=3.$
4. $\lim\limits_{x\to a}\log_{\pi}\left(1-\frac{x}{8}\right)$; a) $a=8-0$; b) $a=-\infty$.	5. $\lim\limits_{x\to a}(1{,}5)^{-x^3+6}$; a) $a=2$; b) $a=+\infty$; c) $a=-\infty$.	6. $\lim\limits_{x\to a}arctg(3x+1)$; a) $a=0$; b) $a=+\infty$; c) $a=-\infty$.
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-225}{\sqrt{x+15}}$; a) $a=-15+0$; b) $a=-\infty$.	8. $\lim\limits_{x\to a}\sin\frac{3+\pi\cdot x}{x+13}$; a) $a=-13-0$; b) $a=+\infty$.	9. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x+13}{2x^2-4x-390}$; a) $a=-13$; b) $a=+\infty$.
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(17\sqrt{x-4}-9\sqrt{x-3}\right)$	11. $\lim\limits_{x\to7}\frac{tg^3(7-x)}{\arcsin\left(\sqrt{x}-\sqrt{7}\right)^3}$.	12. $\lim\limits_{x\to0}\frac{arctg4x^3}{\ln\left(1+5x^3+6x^4\right)}$.
13. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{7x}{8x+2}\right)^{\frac{1}{x}}$.	14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-5}{x+4}\right)^{-1-5x}$.	15. $\lim\limits_{x\to-9}\frac{e^{x+9}-1}{x^2+x-72}$.

Вариант № 26

1. $\lim\limits_{x\to-4}\varphi(x)=0.$	2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=-5;$ $\varphi(x)>-5.$	3. $\varphi(-4-0)=0;$ $\varphi(-4+0)=+\infty.$
4. $\lim\limits_{x\to a}8^{\frac{3}{9-x}}$; a) $a=9+0$; b) $a=9-0$; c) $a=+\infty$.	5. $\lim\limits_{x\to a}arcctg\left(2x-\sqrt{3}\right)$; a) $a=\sqrt{3}$; b) $a=+\infty$; c) $a=-\infty$.	6. $\lim\limits_{x\to a}\ln\left(\frac{x}{6}-2\right)$; a) $a=12+0$; b) $a=+\infty$.
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2+x-42}{19x-114}$; a) $a=6$; b) $a=+\infty$.	8. $\lim\limits_{x\to a}\sin\frac{1-x\cdot\pi}{x-7}$; a) $a=7+0$; b) $a=+\infty$.	9. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{11+x}-2}{7+x}$; a) $a=-7$; b) $a=+\infty$.
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\sqrt{x-5}-\sqrt{14x+2}\right)$	11. $\lim\limits_{x\to3}\frac{tg^4\left(\sqrt{3}-\sqrt{x}\right)}{\arcsin(x-3)^3}$.	12. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\left(11x^3+12x^5\right)}{\ln\left(1+8x^2\right)}$.
13. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{x+2}\right)^{x-3}$.	14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-5}\right)^{5x+6}$.	15. $\lim\limits_{x\to-7}\frac{2x^2+4x-70}{1-e^{7+x}}$.

Вариант № 27

1. $\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)=-6.$	2. $\lim\limits_{x\to-3}\varphi(x)=+\infty.$	3. $\varphi(-0)=-\infty;$ $\varphi(+0)=-1.$
4. $\lim\limits_{x\to a}\lg(30-10x)$; a) $a=3-0$; b) $a=-\infty$.	5. $\lim\limits_{x\to a}9^{3x^3+2x}$; a) $a=0$; b) $a=+\infty$; c) $a=-\infty$.	6. $\lim\limits_{x\to a}arctg\frac{29}{25-x}$; a) $a=+\infty$; b) $a=25-0$; c) $a=25+0$.
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{7x^2-5x-650}{4x^2-x-390}$; a) $a=10$; b) $a=-\infty$.	8. $\lim\limits_{x\to a}\sin\frac{3-x}{x^2-4}$; a) $a=2+0$; b) $a=-\infty$.	9. $\lim\limits_{x\to a}\frac{(2x-1)+(1-2x)^3}{\sqrt{2x-1}}$; a) $a=0{,}5+0$; b) $a=+\infty$.
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{8x-27}-7\sqrt{x+5}\right)$	11. $\lim\limits_{x\to9}\frac{\sin(9-x)}{tg\left(\sqrt{x}-3\right)^2}$.	12. $\lim\limits_{x\to0}\frac{arctg\left(9x+5x^4\right)}{\arcsin\left(10x^5+6x^8\right)}$.
13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+1}{6x-5}\right)^{x^2}$.	14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+6}{x+8}\right)^{9x-7}$.	15. $\lim\limits_{x\to-5}\frac{1-e^{x+5}}{2x^2+5x-25}$.

Вариант № 28

1. $\lim\limits_{x\to 5}\varphi(x)=-3.$	2. $\lim\limits_{x\to -\infty}\varphi(x)=5;$ $\varphi(x)<5.$	3. $\varphi(1-0)=-\infty;$ $\varphi(1+0)=7.$
4. $\lim\limits_{x\to a}7^{\frac{1}{5-x}};$ a) $a=5-0$; b) $a=5+0$; c) $a=3$.	5. $\lim\limits_{x\to a}\ln(x+35);$ a) $a=-35+0$; b) $a=+\infty$.	6. $\lim\limits_{x\to a}arctg(1-4x);$ a) $a=0$; b) $a=+\infty$; c) $a=-\infty$.
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{4x^2+12x-16}{11x+44};$ a) $a=-4$; b) $a=+\infty$.	8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x-8}-2}{x-12};$ a) $a=12$; b) $a=+\infty$.	9. $\lim\limits_{x\to a}\sin\frac{\pi\cdot x+2}{3-x};$ a) $a=3+0$; b) $a=+\infty$.
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{7x-22}-\sqrt{3x+4}\right)$	11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(8x^8+x^{10}\right)}{\ln\left(1+3x^8\right)}.$	12. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\arcsin(x-4)}{arctg\left(4x^2-5x-44\right)}.$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x-3}{3x-2}\right)^{-x^2}.$	14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-7}{x-10}\right)^{2-3x}.$	15. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2+3x-27}{1-e^{3-x}}.$

Вариант № 29

1. $\lim\limits_{x\to -10}\varphi(x)=-2.$	2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\varphi(x)=1;$ $\varphi(x)>1.$	3. $\varphi(-4-0)=-3;$ $\varphi(-4+0)=-\infty.$
4. $\lim\limits_{x\to a}\log_{18}(14x-42);$ a) $a=3+0$; b) $a=+\infty$.	5. $\lim\limits_{x\to a}arctg(7x+6);$ a) $a=-1$; b) $a=+\infty$; c) $a=-\infty$.	6. $\lim\limits_{x\to a}(0{,}1)^{18x^3-7x};$ a) $a=0$; b) $a=+\infty$; c) $a=-\infty$.
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{7x^2-15x-328}{32-4x};$ a) $a=8$; b) $a=-\infty$.	8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x+30}}{x^2-900};$ a) $a=-30+0$; b) $a=+\infty$.	9. $\lim\limits_{x\to a}\sin\frac{x+6}{x+14};$ a) $a=-14+0$; b) $a=+\infty$.
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(14\sqrt{x+1}-20\sqrt{x-8}\right)$	11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+2x^{14}\right)}{tg\left(x^2+3x^5\right)}.$	12. $\lim\limits_{x\to 16}\frac{arctg\left(4-\sqrt{x}\right)^3}{\arcsin^2(16-x)}.$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+6}{3x}\right)^{x^2+1}.$	14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+6}\right)^{4-4x}.$	15. $\lim\limits_{x\to 6}\frac{e^{6-x}-1}{x^2+2x-48}.$

Вариант № 30

1. $\lim\limits_{x\to 2}\varphi(x)=-8.$	2. $\lim\limits_{x\to 4}\varphi(x)=+\infty;$	3. $\varphi(-1-0)=4;$ $\varphi(-1+0)=-\infty.$
4. $\lim\limits_{x\to a}9^{4x+3x^3};$ a) $a=0$; b) $a=+\infty$; c) $a=-\infty$.	5. $\lim\limits_{x\to a}\log_4(17-x);$ a) $a=17-0$; b) $a=-\infty$.	6. $\lim\limits_{x\to a}arcrcc\left(\sqrt{3}-2x\right);$ a) $a=0$; b) $a=+\infty$; c) $a=-\infty$.
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{5x^2-9x-80}{4x-20};$ a) $a=5$; b) $a=-\infty$.	8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3x}}{2-3x};$ a) $a=\frac{2}{3}$; b) $a=+\infty$.	9. $\lim\limits_{x\to a}\ln\frac{x}{x-1};$ a) $a=1+0$; b) $a=+\infty$.
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(13\sqrt{x+2}-17\sqrt{x+1}\right)$	11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin\left(16x^5+12x^3\right)}{\ln\left(14x^2+8x+1\right)}.$	12. $\lim\limits_{x\to -5}\frac{\sin(x+5)}{\sqrt{arctg(x+5)}}.$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x}{7x+1}\right)^{-\frac{1}{x^2}+2}.$	14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{7x-1}.$	15. $\lim\limits_{x\to 8}\frac{x^2+3x-88}{e^{x-8}-1}.$

Вариант № 31

1. $\lim\limits_{x\to -2}\varphi(x)=0.$	2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\varphi(x)=-2;$ $\varphi(x)>-2.$	3. $\varphi(4-0)=-\infty;$ $\varphi(4+0)=+\infty.$
4. $\lim\limits_{x\to a}\log_{\frac{1}{3}}\left(3-\frac{x}{2}\right);$ a) $a=6-0$; b) $a=-\infty$.	5. $\lim\limits_{x\to a}2^{7x+5};$ a) $a=-1$; b) $a=+\infty$; c) $a=-\infty$.	6. $\lim\limits_{x\to a}arctg\frac{3}{x-14};$ a) $a=+\infty$; b) $a=14+0$; c) $a=14-0$.
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{4x^2+21x+5}{5x+x^2};$ a) $a=-5$; b) $a=+\infty$.	8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x-10}}{100-x^2};$ a) $a=10+0$; b) $a=+\infty$.	9. $\lim\limits_{x\to a}\frac{3+x}{\sqrt{6+x}-\sqrt{3}};$ a) $a=-3$; b) $a=+\infty$.
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x-5}-7\sqrt{x-1}\right)$	11. $\lim\limits_{x\to -9}\frac{tg(x+9)}{\sin\left(x^2+x-72\right)}.$	12. $\lim\limits_{x\to -4}\frac{\arcsin\left(x^2-16\right)}{\ln(x+5)}.$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{7x+5}{9x-3}\right)^{\frac{1}{x}+2}.$	14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+7}{x+8}\right)^{7x-3}.$	15. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2x^2-3x-77}{e^{7-x}-1}.$

Вариант №32

1. $\lim\limits_{x\to -8}\varphi(x)=0.$	2. $\lim\limits_{x\to 2}\varphi(x)=-\infty.$	3. $\varphi(3-0)=+\infty;$ $\varphi(3+0)=5.$
4. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{4}\right)^{x^3-2};$ a) $a=1;$ b) $a=+\infty;$ c) $a=-\infty.$	5. $\lim\limits_{x\to a}\ln(5x^2+x);$ a) $a=+\infty;$ b) $a=0+0.$	6. $\lim\limits_{x\to a} ctg(2\pi+x);$ a) $a=\pi+0;$ b) $a=\pi-0;$ c) $a=\frac{\pi}{4}$
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{5x^2-19x-102}{17x^2-13x-192};$ a) $a=-3;$ b) $a=-\infty.$	8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{3x+29}-5}{3x+4};$ a) $a=-\frac{4}{3};$ b) $a=+\infty.$	9. $\lim\limits_{x\to a} arctg\frac{5x^2+x-186}{x-6};$ a) $a=6;$ b) $a=+\infty.$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{30x+4}-\sqrt{35x}\right)$	11. $\lim\limits_{x\to -7}\frac{\arcsin\left(x^2-x-56\right)}{tg(x+7)}$	12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 9x^5}{\ln\left(1+8x^2+6x\right)}.$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5x}{3x+1}\right)^{x^3-2}.$	14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-4}\right)^{3-\frac{x}{3}}.$	15. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{x^2+8x-105}{e^{x-7}-1}.$

Вариант № 33

1. $\lim\limits_{x\to 9}\varphi(x)=1$	2. $\lim\limits_{x\to -\infty}\varphi(x)=+\infty.$	3. $\varphi(-7-0)=-2;$ $\varphi(-7+0)=+\infty.$
4. $\lim\limits_{x\to a}4^{2x-13};$ a) $a=6;$ b) $a=+\infty;$ c) $a=-\infty.$	5. $\lim\limits_{x\to a} arctg\frac{5}{12-x};$ a) $a=12-0;$ b) $a=+\infty;$ c) $a=12+0.$	6. $\lim\limits_{x\to a}\lg(x+19);$ a) $a=-19+0;$ b) $a=+\infty.$
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x+5}}{x^2-25};$ a) $a=-5+0;$ b) $a=+\infty.$	8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{12x^2-11x-366}{9x-54};$ a) $a=6;$ b) $a=-\infty.$	9. $\lim\limits_{x\to a}\sin\frac{\pi(x-3)}{6x+1};$ a) $a=3;$ b) $a=+\infty.$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(11\sqrt{x-5}-10\sqrt{x+7}\right)$	11. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{tg(4x^2-2x-20)}{\sin(x+2)}.$	12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg\left(x^3+2x^4\right)}{\ln(1+7x^6)}.$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{9x+1}{15x-1}\right)^{x^3}.$	14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{2-\frac{x}{4}}.$	15. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{e^{1+x}-1}{4x^2-3x-7}.$

Вариант № 34

1. $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=-7.$	2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=-3;$ $\varphi(x)<-3.$	3. $\varphi(6-0)=3;$ $\varphi(6+0)=+\infty.$
4. $\lim\limits_{x\to a}e^{-6x+7};$ a) $a=1;$ b) $a=-\infty;$ c) $a=+\infty.$	5. $\lim\limits_{x\to a} tg(\frac{3\pi}{4}-x);$ a) $a=\frac{\pi}{2};$ b) $a=\frac{\pi}{4}+0;$ c) $a=\frac{\pi}{4}-0.$	6. $\lim\limits_{x\to a}\log_{20}(9x+72);$ a) $a=+\infty;$ b) $a=-8+0.$
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{8x^2-3x-306}{5x+30};$ a) $a=-6;$ b) $a=-\infty.$	8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x+30}-6}{x-6};$ a) $a=6;$ b) $a=+\infty.$	9. $\lim\limits_{x\to a}\sin\frac{6\pi x+17}{4x-2};$ a) $a=0{,}5+0;$ b) $a=+\infty.$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(21\sqrt{x-6}-\sqrt{16x+13}\right)$	11. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\arcsin\left(3x^2+x-14\right)}{\ln(x-1)}.$	12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg\left(x^2-x\right)}{\sin\left(x^3+3x^2\right)}.$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{8x-5}{5x-3}\right)^{x^2}.$	14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-9}{x-12}\right)^{x-4}.$	15. $\lim\limits_{x\to -5}\frac{2x^2+3x-35}{1-e^{x+5}}.$

Вариант № 35

1. $\lim\limits_{x\to 2}\varphi(x)=-5.$	2. $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=+\infty.$	3. $\varphi(-1-0)=+\infty;$ $\varphi(-1+0)=-\infty.$
4. $\lim\limits_{x\to a}3^{8-2x};$ a) $a=4;$ b) $a=-\infty;$ c) $a=+\infty.$	5. $\lim\limits_{x\to a}\lg(2x-4);$ a) $a=2+0;$ b) $a=+\infty.$	6. $\lim\limits_{x\to a} arctg(2-3x);$ a) $a=1;$ b) $a=+\infty;$ c) $a=-\infty.$
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{15x^2-2x-129}{2x-6};$ a) $a=3;$ b) $a=-\infty.$	8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x-15}}{x^2-225};$ a) $a=15+0;$ b) $a=+\infty.$	9. $\lim\limits_{x\to a}\ln\frac{2x+1}{x+4};$ a) $a=0;$ b) $a=+\infty.$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{14x-8}-4\sqrt{x-5}\right)$	11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\left(x^5-6x\right)}{\ln\left(1+x^3\right)}.$	12. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{arctg\left(5x^2-3x-8\right)}{\sin(x+1)}.$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{10x}{11x+2}\right)^{x+1}.$	14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+3}\right)^{6x-1}.$	15. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{e^{2-x}-1}{3x^2-x-10}.$

Вариант № 36

1. $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=3$.	2. $\lim\limits_{x\to -\infty}\varphi(x)=0$, $\varphi(x)>0$.	3. $\varphi(3-0)=-\infty$; $\varphi(3+0)=+\infty$.
4. $\lim\limits_{x\to a}\ln(24-0{,}2x)$; a) $a=120-0$; b) $a=-\infty$.	5. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{4}\right)^{3-x}$; a) $a=5$; b) $a=+\infty$; c) $a=-\infty$.	6. $\lim\limits_{x\to a} arcctg(\sqrt{3}-2x)$; a) $a=\sqrt{3}$; b) $a=-\infty$; c) $a=+\infty$.
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{3x^2+4x-160}{5x^2-6x-368}$; a) $a=-8$; b) $a=+\infty$.	8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{4x+7}-3}{2x-1}$; a) $a=0{,}5$; b) $a=+\infty$.	9. $\lim\limits_{x\to a}\sin\frac{2x^2}{1+x}$; a) $a=0$; b) $a=+\infty$.
10. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{11x-7}-\sqrt{2x+1}\right)$.	11. $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sin^2(x-9)}{tg\left(3-\sqrt{x}\right)^5}$.	12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg\left(x^2-2x\right)}{\ln\left(1+x^4-5x^3\right)}$.
13. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{3x+8}{2x}\right)^{x-1}$.	14. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x-4}{x-6}\right)^{3-x}$.	15. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x^2+2x-40}{1-e^{x-4}}$.

Вариант № 37

1. $\lim\limits_{x\to -1}\varphi(x)=3$.	2. $\lim\limits_{x\to -2{,}5}\varphi(x)=-\infty$.	3. $\varphi(0-0)=0$; $\varphi(0+0)=-\infty$.
4. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{9}\right)^{10x+7}$; a) $a=+\infty$; b) $a=-\infty$; c) $a=-1$.	5. $\lim\limits_{x\to a} arctg(x-\sqrt{3})$; a) $a=2\sqrt{3}$; b) $a=+\infty$; c) $a=-\infty$.	6. $\lim\limits_{x\to a}\log_{0{,}5}(25+3x)$; a) $a=-8$; b) $a=+\infty$.
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{6x-24}{12x^2-11x-148}$; a) $a=4$; b) $a=+\infty$.	8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{-9-x-2\sqrt{9+x}}{\sqrt{9+x}}$; a) $a=-9+0$; b) $a=+\infty$.	9. $\lim\limits_{x\to a}\lg\frac{1+x^2}{9x^2+10}$; a) $a=0$; b) $a=-\infty$.
10. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{21x-19}-25\sqrt{x+8}\right)$.	11. $\lim\limits_{x\to -10}\frac{tg(x^2+3x-70)}{\sin(x+10)}$.	12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin(3x^8+2x^5)}{\ln\left(1+7x^9+x\right)}$.
13. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{5x-6}{8x+1}\right)^{x+4}$.	14. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^{1-3x}$.	15. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+8x+15}{1-e^{3+x}}$.

Вариант № 38

1. $\lim\varphi(x)=-1$.	2. $\lim\limits_{x\to -\infty}\varphi(x)=-\infty$;	3. $\varphi(-5-0)=+\infty$; $\varphi(-5+0)=0$.
4. $\lim\limits_{x\to a}\ln(4-x)$; a) $a=4-0$; b) $a=-\infty$.	5. $\lim\limits_{x\to a} ctg(x+\pi)$; a) $a=\frac{\pi}{2}$; b) $a=0-0$; c) $a=0+0$.	6. $\lim\limits_{x\to a}0{,}2^{3x-5}$; a) $a=1$; b) $a=-\infty$; c) $a=+\infty$.
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{3x-x^2}{2x^2-5x-3}$; a) $a=3$; b) $a=-\infty$.	8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-6x+9}{x^3+5x^2-24x}$; a) $a=3$; b) $a=+\infty$.	9. $\lim\limits_{x\to a}\cos\frac{x^2-1}{x+1}$; a) $a=-1$; b) $a=+\infty$.
10. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(3\sqrt{2x+1}-2\sqrt{4x+5}\right)$.	11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\left(x^2+3x\right)}{\ln(1-2x)}$.	12. $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2\cdot\sin\frac{3x-1}{7-x^3}$.
13. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2x-3}{3x-7}\right)^{1-x^2}$.	14. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2x-3}{2x}\right)^{x}$.	15. $\lim\limits_{x\to 0{,}5}\frac{e^{2x-1}-1}{4x^2-1}$.

Вариант № 39

1. $\lim\limits_{x\to 3{,}5}\varphi(x)=0$.	2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\varphi(x)=2$; $\varphi(x)>2$.	3. $\varphi(6-0)=0$; $\varphi(6+0)=-\infty$.
4. $\lim\limits_{x\to a}e^{x-1}$; a) $a=1$; b) $a=-\infty$; c) $a=+\infty$.	5. $\lim\limits_{x\to a}\lg(2x+6)$; a) $a=-3+0$; b) $a=+\infty$.	6. $\lim\limits_{x\to a} tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; a) $a=0$; b) $a=\frac{\pi}{4}-0$; c) $a=\frac{\pi}{4}+0$.
7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{4x^2-19x-5}{5-x}$; a) $a=5$; b) $a=+\infty$.	8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{2-\sqrt{x-3}}{7-x}$; a) $a=7$; b) $a=+\infty$.	9. $\lim\limits_{x\to a}\log_2\frac{4x+12}{2x+3}$; a) $a=-\frac{3}{2}+0$; b) $a=+\infty$.
10. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x-6}-7\sqrt{2x+1}\right)$.	11. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\arcsin\left(9-x^2\right)}{tg(3x-9)}$.	12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(x+\sqrt{x}\right)}{\ln(1-6x)}$.
13. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{3x-7}{2x+1}\right)^{3+x}$.	14. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^{x}$.	15. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{1-e^{x+2}}{4-x^2}$.

Вариант № 40

1. $\lim\limits_{x\to 3}\varphi(x)=-5.$	2. $\lim\limits_{x\to 5}\varphi(x)=+\infty;$	3. $\varphi(-1-0)=0;$ $\varphi(-1+0)=+\infty.$
4. $\lim\limits_{x\to a}(0,3)^{7-5x};$ a) $a=1$; b) $a=-\infty$; c) $a=+\infty$.	5. $\lim\limits_{x\to a}\ln(5x+3);$ a) $a=-\dfrac{3}{5}+0$; b) $a=+\infty$.	6. $\lim\limits_{x\to a}arctg(1+0,5x);$ a) $a=0$; b) $a=+\infty$; c) $a=-\infty$.
7. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{9-x^2}{x^2-x-6};$ a) $a=3$; b) $a=-\infty$.	8. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{2x+3}-2}{1-2x};$ a) $a=0,5$; b) $a=+\infty$.	9. $\lim\limits_{x\to a}\sin\dfrac{\pi x+\pi}{3-x};$ a) $a=3-0$; b) $a=+\infty$.
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\sqrt{x-8}-2\sqrt{x-19}\right)$	11. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin\left(x^2-4\right)}{\ln(3-x)}$	12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-x^2\right)\cdot tg\dfrac{x}{7x^3+2}$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5-2x}{1-5x}\right)^{5x+3}.$	14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^{x}.$	15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-e^{x-1}}{x^2-x}.$