Лекция 1

1.1. Предмет теории вероятностей

Любая точная наука изучает не сами явления, протекающие в природе, в обществе, а их математические модели, т. е. описание явлений при помощи набора строго определенных символов и операций над ними. При этом для построения математической модели реального явления во многих случаях достаточно учитывать только основные факторы, закономерности, которые позволяют предвидеть результат опыта (наблюдения, эксперимента) по его заданным начальным условиям. Этим и занимаются большинство математических (и других) дисциплин. Обнаруженные закономерности явления называются *детерминистическими* (определенными). Так, например, формула

$$S = \frac{1}{2} g t^2$$

позволяет найти путь, пройденный свободно падающим телом за t секунд от начала движения.

Однако есть множество задач, для решения которых приходится (надо!) учитывать и случайные факторы, придающие исходу опыта элемент неопределенности. Например, в вопросах стрельбы по цели невозможно без учета случайных факторов ответить на вопрос: сколько ракет нужно потратить для поражения цели? Невозможно предсказать, какая сторона выпадет при бросании монеты. Сколько лет проживет родившийся сегодня ребенок? Сколько времени проработает купленный нами телевизор? Сколько студентов опоздают на лекцию по теории вероятностей? И т. д. Такие задачи, исход которых нельзя предсказать с полной уверенностью, требуют изучения не только основных, главных закономерностей, определяющих явление в общих чертах, но и случайных, второстепенных факторов. Выявленные в таких задачах (опытах) закономерности называются *статистическими* (и.

вероятностными). Статистические закономерности исследуются методами специальных математических дисциплин — теории вероятностей и математической статистики.

Теория вероятностей — математическая наука, изучающая закономерности, присущие массовым случайным явлениям. При этом изучаемые явления рассматриваются в абстрактной форме, независимо от их конкретной природы. То есть теория вероятностей рассматривает не сами реальные явления, а их упрощенные схемы — математические модели. *Предметом теории вероятностей* являются математические модели случайных явлений. При этом под *случайным явлением* понимают явление, предсказать исход которого невозможно (при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта оно протекает каждый раз несколько по-иному). *Примеры случайных явлений:* выпадение герба при подбрасывании монеты, выигрыш по купленному лотерейному билету, результат измерения какой-либо величины, длительность работы телевизора и т. п.

Цель теории вероятностей — осуществление прогноза в области случайных явлений, влияние на ход этих явлений, контроль их, ограничение сферы действия случайности. В настоящее время нет практически ни одной области науки, в которой в той или иной степени не применялись бы вероятностные методы.

1.2. Случайные события, их классификация

Сначала определим понятие «случайное событие» исходя из его интуитивного, наглядного понимания. Пусть проводится некоторый опыт (эксперимент, наблюдение, испытание), исход которого предсказать заранее нельзя. Такие эксперименты в теории вероятностей называют *случайными*. При этом рассматриваются только такие эксперименты, которые можно повторять, хотя бы теоретически, при неизменном комплексе условий произвольное число раз.

Случайным событием (или просто: *событием*) называется любой исход опыта, который может произойти или не произойти.

События обозначаются, как правило, заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C, ...

Пример 1.1. Опыт: бросание игральной кости; событие A — выпадение 5 очков, событие B — выпадение четного числа очков, событие C — выпадение 7 очков, событие D — выпадение целого числа очков, событие E — выпадение не менее 3-х очков, ...

Непосредственные исходы опыта называются *элементарными событиями* и обозначаются через w. Элементарные события (их называют также «элементами», «точками», «случаями») рассматриваются как неразложимые и взаимоисключающие исходы w_1, w_2, w_3 ... этого опыта.

Множество всех элементарных событий называется *пространством элементарных событий или пространством исходов*, обозначается через Ω.

Рассмотрим пример 1.1. Здесь 6 элементарных событий w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6. Событие w_i означает, что в результате бросания кости выпало i очков, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Пространство элементарных событий таково: $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$ или $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Событие называется *достоверным*, если оно обязательно наступит в результате данного опыта, обозначается через Ω.

Событие называется *невозможным*, если оно заведомо не произойдет в результате проведения опыта, обозначается через $\varnothing$.

В примере 1.1 события A и B — случайные, событие C — невозможное, событие D — достоверное.

Два события называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого события в одном и том же опыте, т. е. не смогут произойти вместе в одном опыте. В противном случае события называются *совместными*.

Так, в примере 1.1 события A и B — несовместные, A и E — совместные.

События A_1, A_2, ..., A_n называются *попарно-несовместными*, если любые два из них несовместны.

Несколько событий образуют *полную группу*, если они попарно несовместны и в результате каждого опыта происходит одно и только одно из них.

В примере 1.1 события w_1–w_6 образуют полную группу, w_1–w_5 — нет.

Несколько событий в данном опыте называются *равновозможными*, если ни одно из них не является объективно более возможным, чем другие, т. е. все события имеют равные «шансы».

В примере 1.1 элементарные события w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6 равновозможны. Выпадение герба (A) или решки (B) при бросании монеты — равновозможные события, если, конечно, монета имеет симметричную форму, не погнута, ...

.3. Действия над событиями

Введем основные операции над событиями; они полностью соответствуют основным операциям над множествами.

Суммой событий A и B называется событие $C = A + B$, состоящее в наступлении хотя бы одного из них (т. е. или A, или B, или A и B вместе).

Произведением событий A и B называется событие $C = A \cdot B$, состоящее в совместном наступлении этих событий (т. е. и A и B одновременно).

Разностью событий A и B называется событие $C = A - B$, происходящее тогда и только тогда, когда происходит событие A, но не происходит событие B.

Противоположным событию A называется событие $\overline{A}$, которое происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A (т. е. $\overline{A}$ означает, что событие A не наступило).

Событие A *влечет событие* B (или A является частным случаем B), если из того, что происходит событие A, следует, что происходит событие B; записывают $A \subseteq B$.

Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то события A и B называются *равными*; записывают $A = B$.

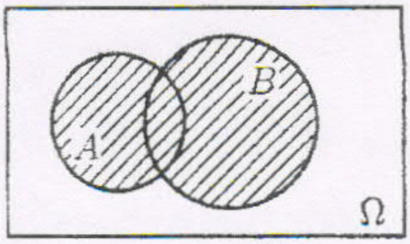
Так, в примере 1.1 (п. 1.2) $B = \{2, 4, 6\}$, $E = \{3, 4, 5, 6\}$, $A = \{5\}$, $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Тогда: $B + E = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $B \cdot E = \{4, 6\}$, $B - E = \{2\}$, $\overline{A} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $B \subseteq D$, $D = \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

События и действия над ними можно наглядно иллюстрировать с помощью *диаграмм Эйлера-Венна*: достоверное событие Ω изображается прямоугольником; элементарные случайные события — точками прямоугольника; случайное событие — областью внутри него.

Действия над событиями можно изобразить так, как показано на рис. 1–5.

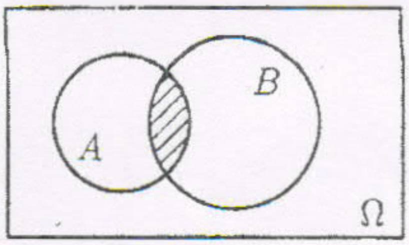
Операции над событиями обладают следующими свойствами:

- $A + B = B + A$, $A \cdot B = B \cdot A$ (переместительное);
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$, $A \cdot B + C = (A + C) \cdot (B + C)$ (распределительное);
- $(A + B) + C = A + (B + C)$, $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (сочетательное);
- $A + A = A$, $A \cdot A = A$;
- $A + \Omega = \Omega$, $A \cdot \Omega = A$;
- $A + \overline{A} = \Omega$, $A \cdot \overline{A} = \varnothing$;
- $\overline{\varnothing} = \Omega$, $\overline{\Omega} = \varnothing$, $\overline{\overline{A}} = A$;
- $A - B = A \cdot \overline{B}$;
- $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ и $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ — законы де Моргана.



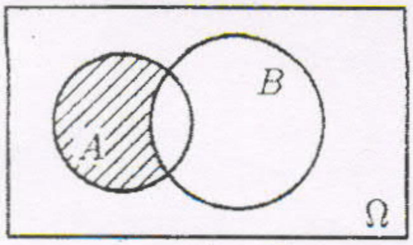
$A + B$

Рис. 1



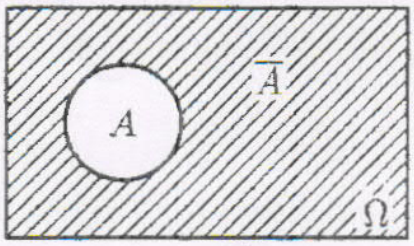
$A \cdot B$

Рис. 2



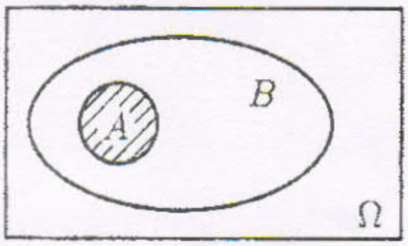
$A - B$

Рис. 3



$\overline{A}$

Рис. 4



$A \subseteq B$

Рис. 5

В их справедливости можно убедиться с помощью диаграмм Эйлера–Венна.

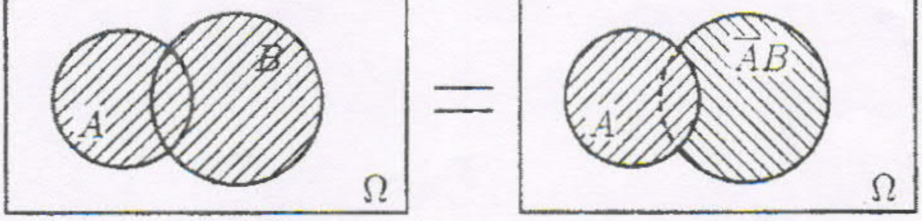
Пример 1.2. Доказать формулу $A + B = A + \overline{A}B$.

❍ Используя некоторые из выше приведенных правил, получаем:

$$A+B = (A+B)\cdot\Omega = A\cdot\Omega+B\cdot\Omega = A\cdot\Omega+B\cdot(A+\overline{A}) = A\cdot\Omega+(A+\overline{A})\cdot B =$$
$$= A\cdot\Omega + A\cdot B + \overline{A}\cdot B = (\Omega + B)\cdot A + \overline{A}\cdot B = \Omega\cdot A + \overline{A}\cdot B = A + \overline{A}\cdot B.$$

Таким образом, *сумму любых двух событий можно представить в виде суммы двух несовместных событий.*

Геометрическое доказательство представлено на рис. 6.



$A + B$ $\qquad$ $A + \overline{A}B$

1.4. Случайные события. Алгебра событий. (Теоретико-множественная трактовка)

Определим теперь основные понятия теории вероятностей, следуя теоретико-множественному подходу, разработанному академиком Колмогоровым А. Н. в 1933 году.

Пусть производится некоторый опыт со случайным исходом.

Множество $\Omega = \{\omega\}$ всех возможных взаимоисключающих исходов данного опыта называется *пространством элементарных событий* (коротко: ПЭС), а сами исходы ω — *элементарными событиями* (или «элементами», «точками»).

Случайным событием A (или просто *событием* A) называется лю-бое подмножество множества Ω, если Ω конечно или счетно (т. е. элементы этого множества можно пронумеровать с помощью множества натуральных чисел): $A \subseteq \Omega$.

Элементарные события, входящие в подмножество A пространства Ω, называются *благоприятствующими событию* A.

Множество Ω называется *достоверным* событием. Ему благоприятствует любое элементарное событие; в результате опыта оно обязательно произойдет.

Пустое множество $\varnothing$ называется *невозможным* событием; в результате опыта оно произойти не может.

Пример 1.3. Опыт: один раз бросают игральную кость. В этом случае ПЭС таково: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ или $\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_6\}$, где w_i — элементарное событие, состоящее в выпадении грани с i очками ($i = \overline{1, 6}$). В данном случае Ω конечно. Примером события A является, например, выпадение нечетного числа очков; очевидно, что $A = \{w_1, w_3, w_5\}$; событию A благоприятствуют элементарные события w_1, w_3, w_5. Однако если нас интересует только факт выпадения четного числа очков, то ПЭС можно построить иначе: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, где ω_1 — выпадение четного числа очков, ω_2 — нечетного.

Пример 1.4. Опыт: стрельба по цели до первого попадания. Тогда $\Omega = \left\{\underset{w_1}{\text{П}}, \underset{w_2}{\text{НП}}, \underset{w_3}{\text{ННП}}, \underset{w_4}{\text{НННП}}, \ldots\right\}$, где П означает попадание в цель, Н — непопадание. Исходов у этого опыта бесконечно (теоретически); Ω счетно.

Пример 1.5. Опыт: наблюдение за временем безотказной работы некоторого агрегата. В этом случае в качестве результата может появиться любое число $t \geqslant 0$; время t меняется непрерывно; ПЭС таково: $\Omega = \{t, 0 \leqslant t < \infty\}$. Исходов у этого опыта бесконечно, Ω несчетно (континуально).

Над событиями можно проводить все операции, выполнимые для множеств.

Сумма (или объединение) двух событий $A \in \Omega$ и $B \in \Omega$ (обозначается $A + B$ или $A \cup B$) — это множество, которое содержит элементы, принадлежащие хотя бы одному из событий A и B.

Произведение двух событий $A \in \Omega$ и $B \in \Omega$ (обозначается AB или $A \cap B$) — это множество, которое содержит элементы, общие для событий A и B.

(обозначается $A - B$ или $A \setminus B$) — это множество, которое содержит элементы события A, не принадлежащие событию B.

Противоположное событию $A \in \Omega$ событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$. ($\overline{A}$ называют также *дополнением* множества A.)

Событие A влечет событие B (обозначается $A \subseteq B$), если каждый элемент события A содержится в B.

По определению: $\varnothing \subseteq A$ для любого A.

События A и B называются *несовместными*, если их произведение есть невозможное событие, т. е. $A \cdot B = \varnothing$.

Несколько событий A_1, $A_2, \ldots$, A_n образуют *полную группу* несовместных событий, если их сумма представляет все ПЭС, а сами события несовместны, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ и $A_i \cdot A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$.

Полную группу образуют, например, события A и $\overline{A}$ ($A + \overline{A} = \Omega$, $A \cdot \overline{A} = \varnothing$).

В случае несчетного пространства Ω в качестве событий рассматриваются не все подмножества Ω, а лишь некоторые классы этих подмножеств, называемые алгебрами и σ-алгебрами множеств.

Класс S подмножеств пространства Ω называется *алгеброй множеств (событий)*, если:

1. $\varnothing \in S$, $\Omega \in S$;

2. из $A \in S$ вытекает, что $\overline{A} \in S$;

3. из $A \in S$, $B \in S$ вытекает, что $A + B \in S$, $A \cdot B \in S$.

Заметим, что в условии 3 достаточно требовать либо $A + B \in S$, либо $AB \in S$, так как $A + B = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$, $A \cdot B = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$.

Алгебру событий образует, например, система подмножеств $S = \{\varnothing, \Omega\}$. Действительно, в результате применения любой из вышеприведенных операций к любым двум элементам класса S снова получается элемент данного класса: $\varnothing + \Omega = \Omega$, $\varnothing \cdot \Omega = \varnothing$, $\overline{\varnothing} = \Omega$, $\overline{\Omega} = \varnothing$.

При расширении операций сложения и умножения на случай счетного множества алгебра множеств S называется σ-алгеброй, если из $A_n \in S$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, следует $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in S$, $\prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in S$ (достаточно требовать либо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in S$, либо $\prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in S$).

Множество всех подмножеств множества Ω, если оно конечно или счетно, образует алгебру.

Лекция 2

1.5. Свойство статистической устойчивости относительной частоты события

Пусть в n повторяющихся опытах некоторое событие A *наступило* n_A *раз.*

Число n_A называется *частотой* события A, а отношение

$$\frac{n_A}{n} = P^*(A) \tag{1.1}$$

называется *относительной частотой* (или *частостью*) события A в рассматриваемой серии опытов.

Относительная частота события обладает следующими свойствами:

1. Частость любого события заключена между нулем и единицей, т. е.

$$0 \leqslant P^*(A) \leqslant 1.$$

2. Частость невозможного события равна нулю, т. е.

$$P^*(\varnothing) = 0.$$

3. Частость достоверного события равна 1, т. е.

$$P^*(\Omega) = 1.$$

4. Частость суммы двух несовместных событий равна сумме частоты этих событий, т. е. если $AB = \varnothing$, то

$$P^*(A + B) = P^*(A) + P^*(B).$$

❑ Свойства очевидны, так как $0 \leqslant n_A \leqslant n$ для любого события A; для невозможного события $n_A = 0$; для достоверного события $n_A = n$; если события A и B несовместны ($AB = \varnothing$), то $n_{A+B} = n_A + n_B$, следовательно, $P^*(A+B) = \frac{n_{A+B}}{n} = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} = P^*(A) + P^*(B)$.

Частость обладает еще одним фундаментальным свойством, называемым *свойством статистической устойчивости*: с увеличснием числа опытов (т. е. n) она принимает значения, близкие к некоторому постоянному числу (говорят: частость стабилизируется, приближаясь к некоторому числу, частость колеблется около некоторого числа, или ее значения группируются около некоторого числа).

Так, например, в опыте — бросание монеты (однородной, симметричной, ...) — относительная частота появления герба при 4040 бросаниях (Ж. Бюффон) оказалась равной $0{,}5069 = \frac{2048}{4040}$, а в опыте с 12000

3. Статистическая вероятность достоверного события равна единице, т. е.
$$P(\Omega) = 1.$$
4. Статистическая вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е. если $A \cdot B = \varnothing$, то
$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Статистический способ определения вероятности, опирающийся на реальный опыт, достаточно полно выявляет содержание этого понятия. Некоторые ученые (Р. Мизес и другие) считают, что эмпирическое определение вероятности (т. е. $p = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$) следует считать основным определением вероятности.

Недостатком статистического определения является неоднозначность статистической вероятности; так в примере с бросанием монеты (п. 1.5) в качестве вероятности можно принять не только число 0,5, но и 0,49 или 0,51 и т. д. Для надежного определения вероятности нужно проделать большое число испытаний (опытов), что не всегда просто (или дешево).

1.7. Классическое определение вероятности

Существует простой способ определения вероятности события, основанный на равновозможности любого из конечного числа исходов опыта. Пусть проводится опыт с n исходами, которые можно представить в виде *полной группы несовместных равновозможных* событий. Такие исходы называются *случаями, шансами, элементарными событиями*, опыт — *классическим*. Про такой опыт говорят, что он сводится к *схеме случаев* или *схеме урн* (ибо вероятностную задачу для такого опыта можно заменить эквивалентной ей задачей с урнами, содержащими шары разных цветов).

Случай ω, который приводит к наступлению события A, называется *благоприятным* (или — *благоприятствующим*) ему, т. е. случай w влечет событие A: $w \subseteq A$.

Вероятностью события A называется отношение числа m случаев, благоприятствующих этому событию, к общему числу n случаев, т. е.
$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.3}$$
Наряду с обозначением $P(A)$ для вероятности события A используется обозначение p, т. е. $p = P(A)$.

Лекция 3-4

Геометрическое определение вероятности

Геометрическое определение вероятности применяется в случае, :огда исходы опыта равновозможны, а ПЭС (или Ω) есть бесконечное іесчетное множество. Рассмотрим на плоскости некоторую область Ω, ıмеющую площадь S_Ω, и внутри области Ω область D с площадью S_D см. рис. 8).

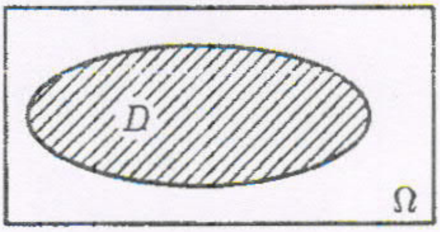


Рис. 8

В области Ω случайно выбирается точка X. Этот выбор можно интерпретировать как *бросание точки X в область* Ω. При этом попадание точки в область Ω — достоверное событие, в D — случайное. Іредполагается, что все точки области Ω равноправны (все элементарные события равновозможны), т. е. что брошенная точка может попасть в любую точку области Ω и вероятность попасть в область D пропорциональна площади этой области и не зависит от ее расположения и формы. Пусть событие $A = \{X \in D\}$, т. е. брошенная точка попадет в область D.

***Геометрической вероятностью события** A* называется отношение

Из классического определения вероятности (1.3) вытекают следующие свойства:

1. Вероятность любого события заключена между нулем и единицей т. е.
$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$
2. Вероятность невозможного события равна нулю, т. е.
$$P(\varnothing) = 0.$$
3. Вероятность достоверного события равна единице, т. е.
$$P(\Omega) = 1.$$
4. Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е. если $A \cdot B = \varnothing$, то
$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Они проверяются так же, как и для относительной частоты (п. 1.5). В настоящее время свойства вероятности определяются в виде аксиом (см. п. 1.11).

Пример 1.6. В урне (емкости) находятся 12 белых и 8 черных шаров. Какова вероятность того, что наудачу вынутый шар будет белым?

◐ Пусть A — событие, состоящее в том, что вынут белый шар. Ясно, что $n = 12 + 8 = 20$ — число всех равновозможных случаев (исходов опыта). Число случаев, благоприятствующих событию A, равно 12, т. е. $m = 12$. Следовательно, по формуле (1.3) имеем: $P(A) = \frac{12}{20}$, т. е. $P(A) = 0,6$.

Упражнения

Найти вероятность того, что в наудачу написанном двузначном числе цифры разные.

Набирая номер телефона, абонент забыл 2 последние цифры и набрал их наугад. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Геометрическое определение вероятности события применимо и в случае, когда области Ω и D обе линейные или объемные. В первом случае

$$P(A) = \frac{l_D}{l_\Omega}, \tag{1.16}$$

во втором —

$$P(A) = \frac{V_D}{V_\Omega}, \tag{1.17}$$

где l — длина, а V — объем соответствующей области.

Все три формулы ((1.15)), ((1.16)), ((1.17)) можно записать в виде

$$P(A) = \frac{\operatorname{mes} D}{\operatorname{mes} \Omega}, \tag{1.18}$$

где через mes обозначена мера (S, l, V) области.

Геометрическая вероятность обладает всеми свойствами, присущими классическому (и другим) определению:

1. Геометрическая вероятность любого события заключена между нулем и единицей, т. е.
$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$
2. Геометрическая вероятность невозможного события равна нулю, т. е.
$$P(\varnothing) = 0.$$
3. Геометрическая вероятность достоверного события равна единице, т. е.
$$P(\Omega) = 1.$$
4. Геометрическая вероятность суммы несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е. если $A \cdot B = \varnothing$, то
$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Проверим, например, свойство 4: пусть $A = \{x \in D_1\}$, $B = \{x \in D_2\}$, где $D_1 \cdot D_2 = \varnothing$, т. е. D_1 и D_2 непересекающиеся области. Тогда $P(A+B) = \frac{S_{D_1+D_2}}{S_\Omega} = \frac{S_{D_1}}{S_\Omega} + \frac{S_{D_2}}{S_\Omega} = P(A) + P(B)$.

Пример 1.23. (Задача о встрече.) Два человека договорились о встрече между 9 и 10 часами утра. Пришедший первым ждет второго в течение 15 мин, после чего уходит (если не встретились). Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый наудачу выбирает

○ Пусть x — время прихода первого, а y — второго. Возможные значения x и y: $0 \leqslant x \leqslant 60$, $0 \leqslant y \leqslant 60$ (в качестве единиц масштаба возьмем минуты), которые на плоскости Oxy определяют квадрат со стороной, равной 60. Точки этого квадрата изображают время встречающихся (см. рис. 9).

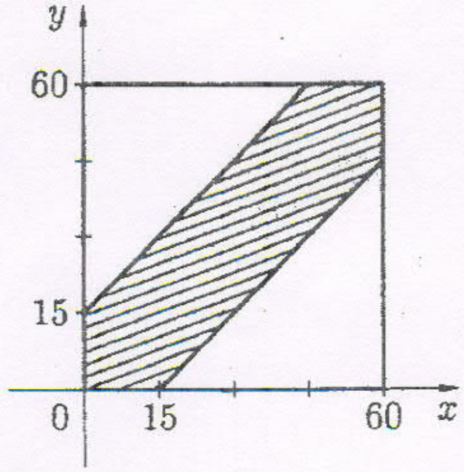


Рис. 9

Тогда $\Omega = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 60, 0 \leqslant y \leqslant 60\}$; все исходы Ω равновозможны, так как лица приходят наудачу. Событие A — лица встретятся — произойдет, если разность между моментами их прихода будет не более 15 мин (по модулю), т. е. $A = \{(x, y) : |y - x| \leqslant 15\}$. Неравенство $|y - x| \leqslant 15$, т. е. $x - 15 \leqslant y \leqslant x + 15$ определяет область, заштрихованную на рис. 9, т. е. точки полосы есть исходы, благоприятствующие встрече. Искомая вероятность определяется по формуле (1.15):

$$P(A) = \frac{60^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 45}{60^2} = \frac{7}{16} \approx 0{,}44.$$

Лекция 5

1.16 Формула полной вероятности

Одним из следствий совместного применения теорем сложения и умножения вероятностей являются формулы полной вероятности и Байеса. Напомним, что события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу, если $A_i \cdot A_j = \varnothing$, $i \neq j$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$. Систему таких событий называют также *разбиением*.

Теорема 1.2. Пусть события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу. Тогда для любого события A имеет место формула *полной вероятности* или *средней вероятности*.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i), \tag{1.30}$$

❑ Так как $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$, то в силу свойств операций над событиями (п. 1.3), $A = A \cdot \Omega = A \cdot (H_1 + H_2 + \ldots + H_n) = A \cdot H_1 + A \cdot H_2 + \ldots + A \cdot H_n$. Из того, что $H_i \cdot H_j = \varnothing$, следует, что $(A \cdot H_i) \cdot (A \cdot H_j) = \varnothing$, $i \neq j$, т.е. события $A \cdot H_i$ и $A \cdot H_j$ также несовместны. Тогда по теореме сложения вероятностей $P(A) = P(A \cdot H_1) + P(A \cdot H_2) + \ldots + P(A \cdot H_n)$ т.е. $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A \cdot H_i)$. По теореме умножения вероятностей $P(A \cdot H_i) = P(H_i) \cdot P(A|H_i)$, откуда и следует формула (1.30). ■

Отметим, что в формуле (1.30) события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ обычно называют *гипотезами*; они исчерпывают все возможные предположения (гипотезы) относительно исходов как бы первого этапа опыта, событие A — один из возможных исходов второго этапа.

Пример 1.29. В сборочный цех завода поступает 40% деталей из I цеха и 60% — из II цеха. В I цехе производится 90% стандартных деталей, а во II — 95%. Найти вероятность того, что наудачу взятая сборщиком деталь окажется стандартной.

❍ Взятие детали можно разбить на два этапа. Первый — это выбор цеха. Имеется две гипотезы: H_1 — деталь изготовлена I цехом, H_2 — II цехом. Второй этап — взятие детали. Событие A — взятая наудачу деталь стандартна. Очевидно, события H_1 и H_2 образуют полную группу, $P(H_1) = 0{,}4$, $P(H_2) = 0{,}6$. Числа 0,90 и 0,95 являются условными вероятностями события A при условии гипотез H_1 и H_2 соответственно, т. е. $P(A|H_1) = 0{,}90$ и $P(A|H_2) = 0{,}95$. По формуле (1.30) находим $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{2} P(H_i) \cdot P(A|H_i) = 0{,}4 \cdot 0{,}90 + 0{,}6 \cdot 0{,}95 = 0{,}93$.

Формула Байеса (теорема гипотез)

Следствием формулы (1.30) является формула Байеса или *теорема гипотез*. Она позволяет переоценить вероятности гипотез H_i, принятых до опыта и называемых *априорными* («a priori», доопытные, лат.) *по результатам уже проведенного опыта*, т. е. найти условные вероятности $P(H_i|A)$, которые называют *апостериорными* («a posteriori», послеопытные).

Теорема 1.3. Пусть события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу событий. Тогда условная вероятность события H_k ($k = \overline{1,n}$) при условии, что событие A произошло, задается формулой

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{P(A)}, \qquad (1.31)$$

где $P(A) = P(A_1) \cdot P(A|H_1) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A|H_n)$ — формула полной вероятности. Формула (1.31) называется *формулой Байеса*[1].

1.17. Независимые испытания. Схема Бернулли

С понятием «независимых событий» связано понятие «независимых испытаний (опытов)».

Несколько опытов называются *независимыми*, если их исходы представляют собой независимые события (независимые в совокупности).

Другими словами, если проводится несколько испытаний, т. е. опыт выполняется при данном комплексе условий многократно (такое явление называется «последовательностью испытаний»), причем вероятность наступления некоторого события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называются *независимыми*.

Примерами независимых испытаний могут служить: несколько (n раз) подбрасываний монеты; стрельба (n раз) по мишени без поправок на ранее допущенную ошибку при новом выстреле; несколько (n раз) выниманий из урны одинаковых на ощупь занумерованных шаров, если шары каждый раз (после просмотра) возвращаются назад в урну, и т. д.

При практическом применении теории вероятностей часто используется стандартная схема, называемая схемой Бернулли или схемой независимых испытаний.

Последовательность n независимых испытаний, в каждом из которых может произойти некоторое событие A (его называют *успехом*) с вероятностью $P(A) = p$ или противоположное ему событие $\overline{A}$ (его называют *неудачей*) с вероятностью $P(\overline{A}) = q = 1 - p$, называется *схемой Бернулли*.

Например, при стрельбе по мишени: событие A — попадание (успех), событие $\overline{A}$ — промах (неудача); при обследовании n изделий на предмет годности: событие A — деталь годная (успех), событие $\overline{A}$ — деталь бракованная (неудача) и т. д.

В каждом таком опыте ПЭС состоит только из двух элементарных событий, т. е. $\Omega = \{w_0, w_1\}$, где w_0 — неудача, w_1 — успех, при этом $A = \{w_1\}$, $\overline{A} = \{w_0\}$. Вероятности этих событий обозначают через p и q соответственно ($p + q = 1$). Множество элементарных исходов для n опытов состоит из 2^n элементов. Например, при $n = 3$, т. е. опыт повторяется 3 раза, $\Omega = \left\{ \frac{(\overline{A}, \overline{A}, \overline{A})}{w_0}; \frac{(A, A, \overline{A})}{w_1}; \frac{(A, \overline{A}, A)}{w_2}; \frac{(\overline{A}, A, A)}{w_3}; \frac{(A, \overline{A}, \overline{A})}{w_4}; \frac{(\overline{A}, A, \overline{A})}{w_5}; \frac{(\overline{A}, \overline{A}, A)}{w_6}; \frac{(A, A, A)}{w_7} \right\}$. Вероятность каждого элементарного события определяется однозначно. По теореме умножения вепорядке (например, [illegible]

m раз

будет той же самой, т. е. $p^m q^{n-m}$.

Число таких сложных событий — в n опытах m раз встречается событие A в различном порядке — равно числу сочетаний из n по m, т. е. C_n^m. Так как все эти сложные события несовместны, то по теореме сложения вероятностей искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных сложных событий, т. е.

$$P_n(m) = \underbrace{p^m q^{n-m} + \ldots + p^m q^{n-m}}_{C_n^m \text{слагаемых}} = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0, 1, \ldots, n.$$

Можно заметить, что вероятности $P_n(m)$, $m = 0, 1, \ldots, n$ являются коэффициентами при x^m в разложении $(q + px)^n$ по формуле бинома Ньютона:

$$(q+px)^n = q^n + C_n^1 q^{n-1} px + C_n^2 q^{n-2} p^2 x^2 + \ldots + C_n^m q^{n-m} p^m x^m + \ldots + p^n x^n.$$

Поэтому совокупность вероятностей $P_n(m)$ называют *биномиальным законом распределения вероятностей* (см. п. 2.7), а функцию $\varphi(x) = (q + px)^n$ — *производящей функцией* для последовательности независимых опытов.

Если в каждом из независимых испытаний вероятности наступления события A *разные*, то вероятность того, что событие A наступит m раз в n опытах, равна коэффициенту при m-й степени многочлена $\varphi_n(z) = (q_1 + p_1 x)(q_2 + p_2 x) \cdot \ldots \cdot (q_n + p_n z)$, где $\varphi_n(z)$ — производящая функция.

Если в серии из n независимых опытов, в каждом из которых может произойти одно и только одно из k событий A_1, A_2, ..., A_k с соответствующими вероятностями p_1, p_2, ..., p_k, то вероятность того, что в этих опытах событие A_1 появится m_1 раз, событие A_2 — m_2 раз, ..., событие A_k — m_k раз, равна

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1! m_2! \ldots m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_k^{m_k}, \tag{1.33}$$

где $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$. Вероятности (1.33) называются *полиномиальным распределением*.

Пример 1.31. Производится 3 независимых выстрела по цели. Вероятности попадания при разных выстрелах одинаковы и равны $p = 0{,}9$. Какова вероятность: а) промаха; б) одного попадания; в) двух попаданий; г) трех попаданий? Решить задачу в случае, если вероятности попадания при разных выстрелах различны: $p_1 = 0{,}7$, $p_2 = 0{,}8$, $p_3 = 0{,}9$.

В данном случае $n = 3$, $p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$. Пользуясь формулой Бернулли (1.32), находим:

а) $P_3(0) = C_3^0 \cdot 0{,}9^0 \cdot 0{,}1^3 = 0{,}001$ — вероятность трех промахов;

б) $P_3(1) = C_3^1 \cdot 0{,}9^1 \cdot 0{,}1^2 = 3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}01 = 0{,}027$ — вероятность одного попадания;

в) $P_3(2) = C_3^2 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^1 = 3 \cdot 0{,}81 \cdot 0{,}1 = 0{,}243$ — вероятность двух попаданий;

г) $P_3(3) = C_3^3 \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^0 = 0{,}9^3 = 0{,}729$ — вероятность трех попаданий.

Эти результаты можно изобразить графически, отложив на оси Ox значения m, на оси Oy — значения $P_n(m)$ (рис. 14).

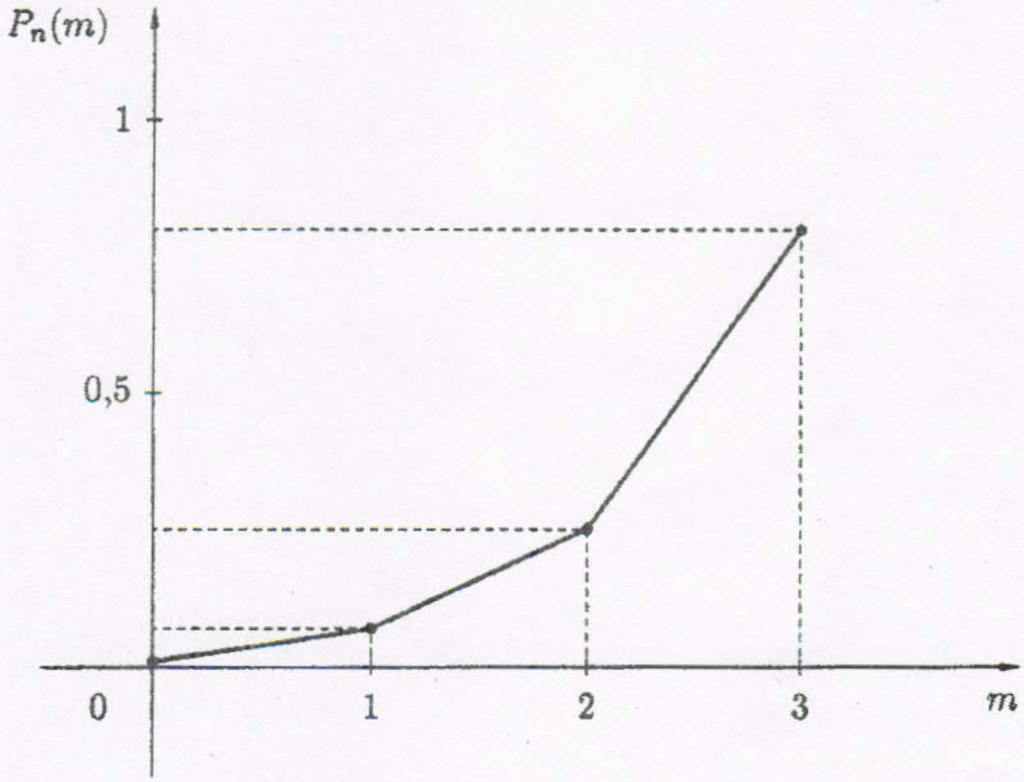


Рис. 14

Ломаная, соединяющая точки $(0; 0{,}001)$, $(1; 0{,}027)$, $(2; 0{,}243)$, $(3; 0{,}729)$, называется *многоугольником распределения вероятностей*.

Если вероятности при разных выстрелах различны, то производящая функция имеет вид $\varphi_3(z) = (0{,}3 + 0{,}7z)(0{,}2 + 0{,}8z)(0{,}1 + 0{,}9z) = 0{,}504z^3 + 0{,}398z^2 + 0{,}092z + 0{,}006$. Откуда находим вероятность трех, двух, одного попаданий, промаха соответственно: $P_3(3) = 0{,}504$, $P_3(2) = 0{,}398$, $P_3(1) = 0{,}092$, $P_3(0) = 0{,}006$. (Контроль: $0{,}504 + 0{,}398 + 0{,}092 + 0{,}006 = 1$.)

тарным событием для n опытов будет последовательность из n нулей и единиц. Тройка чисел $(0,0,0)$ означает, что во всех трех опытах событие A не наступило; тройка чисел $(0,1,0)$ означает, что событие A наступило во 2-м опыте, а в 1-м и 3-м — не наступило.

1.20. Формула Бернулли

Простейшая задача, относящаяся к схеме Бернулли, состоит в определении вероятности того, что в n независимых испытаниях событие A наступит m раз $(0 \leqslant m \leqslant n)$. Обозначается искомая вероятность так: $P_n(m)$ или $P_{n,m}$ или $P(\mu_n = m)$, где μ_n — число появления события A в серии из n опытов.

Например, при бросании игральной кости 3 раза $P_3(2)$ означает вероятность того, что в 3-х опытах событие A — выпадение цифры 4 — произойдет 2 раза. Очевидно,

$$P_3(2) = p^2q + p^2q + p^2q =$$
$$= \left[\left\{(A, A, \overline{A}); (A, \overline{A}, A); (\overline{A}, A, A)\right\}\right] = 3p^2q = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{72} = 0{,}069.$$

Теорема 1.4. Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p, а вероятность его непоявления равна $q = 1 - p$, то вероятность того, что событие A произойдет m раз определяется *формулой Бернулли*

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{1.32}$$

❑ Вероятность одного сложного события, состоящего в том, что событие A в n независимых опытах появится m раз в первых m опытах и не появится $(n - m)$ раз в остальных опытах (это событие $\underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{m \text{ раз}} \cdot \underbrace{\overline{A} \cdot \overline{A} \cdot \ldots \cdot \overline{A}}_{(n-m) \text{ раз}}$) по теореме умножения вероятностей равна $p^m q^{n-m}$. Вероятность появления события A снова m раз, но в другом

❑ Применив формулы условной вероятности (п. 1.14) и умножения вероятностей (п. 1.15), имеем

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k \cdot A)}{P(A)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{P(A)},$$

где $P(A)$ — формула полной вероятности (п. 1.17) ■

Пример 1.30. В примере 1.29 (п. 1.17) найти вероятность того, что эта стандартная деталь изготовлена II цехом.

❍ Определим вероятность гипотезы H_2 при условии, что событие A (взятая деталь стандартна) уже произошло, т. е. $P(H_2|A)$:

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}95}{0{,}93} = \frac{19}{31} \approx 0{,}613.$$ ●