ноябрь 2009г. 22,10

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Самарский государственный архитектурно-строительный университете»
Филиал в г. Белебей Республики Башкортостан
Кафедра гуманитарных и естественно-научных дисциплин

Решение систем алгебраических уравнений

Методические указания к практическим занятиям

Утверждены
редакционно-издательским
советом университета
21 января 2008 г.

Самара 2009

Составитель И.А.Попова

УДК 517. 3(07)

Решение систем алгебраических уравнений: методические указания к практическим занятиям /сост. И.А. Попова; Самарск. гос. арх-строит. ун-т.-Самара 2009.- 23 с.

В методических указаниях приводятся методы Крамера и Гаусса решения систем алгебраических уравнений; примеры систем, имеющих единственное решение, множество решений. Предлагаются примеры для самостоятельного решения с целью закрепления данного материала. Имеется список основной литературы по теме.

Методические указания предназначены для студентов 1-го курса (1-2-го семестров обучения) специальностей ПГС (270102), ЭУС (080502).

Учебное издание

Редактор Л.Н. Конаныхина
Технический редактор А.И.Непогодина
Корректор Е.М. Исаева

Подписано в печать 20.09.2009.
Формат 60х84 /16. Бумага офсетная. Печать оперативная.
Уч.-изд. л. 5.75. Усл. печ. л. 5.9. Тираж 100 экз.

Самарский государственный архитектурно-строительный университет.
443001 Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

Отпечатано в типографии ООО «СамЛюксПринт»
443095 Самара, ул. Ташкентская, 151 а.
Тел.: (846) 927-07-09, 267-58-73.

Общая часть

К системам алгебраических уравнений приводят многие задачи различных наук и их самых разнообразных приложений.

В естественных науках (физика, химия, биология, геология, география и др.) при обработке результатов наблюдений часто встречаются со следующей задачей. Произведены измерения и получены значения одной величины (y) в зависимости от значений другой (x): зависимость величины y от величины x может быть линейной, квадратичной или какой-нибудь иной, выражаемой соответственно формулами $y = ax + b$, $y = ax^2+bx+c$ и т. п. Требуется найти коэффициенты соответствующей формулы.

Формулы, полученные при решении такого рода задач, называются эмпирическими. Значения коэффициентов эмпирической формулы находятся из системы n линейных уравнений с m неизвестными; коэффициенты этих уравнений соответствующим образом выражаются через результаты измерений — значения x_i и y_i; $(i = 1, 2, \ldots, n)$ рассматриваемых величин x и y.

К системам линейных уравнений приводят задачи геодезии, связанные с построением карт на основании данных геодезической съемки. Эти уравнения содержат большое число неизвестных. При составлении прогнозов погоды также приходится решать линейные системы со многими неизвестными.

Системы линейных уравнений широко используются в различных областях физики. К решению систем линейных уравнений сводятся задачи механики, связанные с расчётом фундаментов арок, мостов и других сооружений. В последние годы системы линейных уравнений находят широкое применение при решении технических, технологических и экономических задач.

Поэтому в данных методических указаниях разбираются основные методы решения систем линейных уравнений, в которых число уравнений не всегда совпадает с числом неизвестных. Рассматриваются примеры с решениями систем, приводятся необходимые пояснения и рекомендации. Данные методические указания помогут студентам очного и заочного отделений подготовиться к практическим занятиям по теме «Решение систем алгебраических уравнений». На последних страницах указаний имеется список используемой литературы, где более полно и подробно предоставлены теоретические положения темы.

1 ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Системой m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$, или *линейной системой*, называется совокупность уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

где a_{ik}, b_i - заданные числа. Числа a_{ik} $(i=1,2,\ldots,m;\ k=1,2,\ldots n)$ называются *коэффициентами*, числа b_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ — свободными членами. Коэффициенты обозначены буквой a с двумя индексами i и k; первый индекс (i) указывает номер уравнения, второй индекс (k) — номер неизвестной, к которой относится данный коэффициент. Число m уравнений может быть больше, равно или меньше числа n неизвестных.

Линейная система называется *неоднородной*, если среди свободных членов имеются отличные от нуля. Если все свободные члены равны нулю, то линейная система называется *однородной*. Однородная система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Решением линейной системы (1) называется упорядоченная совокупность m чисел

$$c_1, c_2, \ldots, c_m, \quad (c_1, c_2, \ldots, c_m), \tag{3}$$

подстановка которых вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно ($x_1 = c_1$, x_2 c_2, $\ldots$, $x_n = c_n$) обращает в тождество каждое из уравнений этой системы. Отметим, что числа (3) образуют одно решение.

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется совместной, а система, не имеющая ни одного решения,— несовместной. Отметим, что однородная система (2) всегда совместна, так как она имеет нулевое решение: $x_1=0$, $x_2=0$, $\ldots$, $x_n=0$. Критерий совместимости линейной системы выражается следующей теоремой Кронекера-Капелли.

Теорема 1. *Линейная система совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу её расширенной матрицы.*

Совместная система, имеющая единственное решение, называется *определенной*. Совместная система называется *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Две системы называются *эквивалентными*, или *равносильными*, если любое решение одной из них является также решением другой, т. е. если они имеют одно и то же множество решений. Любые две несовместные системы считаются эквивалентными.

К элементарным преобразованиям линейной системы относятся следующие преобразования: 1) умножение уравнения системы на число, отличное от нуля; 2) прибавление к одному уравнению системы другого ее уравнения, умноженного на любое число; 3) перестановка местами двух уравнений системы.

Элементарными преобразованиями строк (столбцов) матрицы являются:

а) умножение i строки (столбца) матрицы на число $k \neq 0$;

б) прибавление к i строке (столбцу) j строки (столбца), умноженной на число k;

в) перестановка i и j строк (столбцов) матрицы.

Матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

составленная из коэффициентов линейных уравнений системы (1), называется *основной матрицей системы* (или *матрицей системы*).

Матрица

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} & b_m \end{array}\right], \tag{5}$$

полученная присоединением к основной столбца из свободных членов, называется *расширенной матрицей системы* (1).

Рассмотрим столбцевые матрицы, составленные из неизвестных и свободных членов системы (1):

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Поскольку матрица А согласована с матрицей X, то можно найти произведение

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

Элементами этой столбцевой матрицы являются левые части уравнений системы (1), поэтому на основании определения равенства матриц получаем

AX=B.

2 РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ В Excel

Пусть необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (7)$$

С использованием понятия матрицы и матричных операций система уравнений может быть записана в матричном виде:

$$A\ \bar{x} = \bar{b}. \quad (8)$$

Здесь [A] - матрица коэффициентов системы вида:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}. \quad (9)$$

где x, $\bar{b}$ - вектор неизвестных и вектор свободных членов соответственно.

Решение системы методом обратной матрицы может быть получено в результате умножения правой части системы уравнения (8) на матрицу, обратную к матрице коэффициентов системы:

$$A^{-1}A\bar{x} = A^{-1}\bar{b}.$$

Учитывая, что произведение обратной матрицы на прямую дает единичную матрицу, получаем

$$E\bar{x} = A^{-1}\bar{b} \text{ или } \bar{x} = A^{-1}\bar{b}.$$

Таким образом, решение системы сводится к нахождению обратной матрицы A^{-1} и затем вычислению произведения этой матрицы на вектор $\bar{b}$.

Этот метод удобно применять в тех случаях, когда несколько раз решается система с разными правыми частями. В этом случае достаточно один раз вычислить обратную матрицу A^{-1} и затем умножать ее на разные векторы $\bar{b}$.

Пример 1

Методом обратной матрицы решить систему

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = 2, \\ x_1 - 5x_2 = -4. \end{cases}$$

Решение ищется в виде $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$. Вычислим обратную матрицу A:

1) det A = -25 + 3 = -22;

$$2)\ A_{ij} = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}; \quad 3)\ A^T = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix},$$

A^T - транспортированная матрица;

$$3)\ A^{-1} = -1/22 \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/22 & -3/22 \\ 1/22 & 5/22 \end{bmatrix}$$

Теперь найдем вектор решения:

$$\bar{x} = A^{-1} \cdot \bar{b} = \begin{bmatrix} 5/22 & -3/22 \\ 1/22 & -5/22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/22 + 12/22 \\ 2/22 + 20/22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

т.е. $x_1 = 1$; $x_2 = 1$.

Пример 2 Решить систему уравнений в Excel

$$\begin{cases} -8x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 10, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2. \end{cases}$$

Система уравнений имеет решение $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. В матричной форме уравнения записываются следующим образом:

$$\begin{bmatrix} -8 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Для решения системы в Excel нужно:

1. Создать новый лист и присвоить ему имя «Система».
2. В ячейке A1 ввести **Решение систем уравнений; обращение матрицы** (см.табл. 1).
3. В ячейку B3 ввести текст Ax = b . Теперь ввести матрицу коэффициентов A
и вектор правой части b, для этого:

а) в ячейку A5 ввести «Исходная матрица A ».

б) в ячейки A6:C8 ввести элементы матрицы A :

Ячейка	**Значение**	**Ячейка**	**Значение**	**Ячейка**	**Значение**
A6	-8	B6	1	C6	2
A7	5	B7	7	C7	-3
A8	2	B8	1	C8	-2

в) в ячейку E5 ввести «Правая часть (b)»;

г) в ячейки E6:E8 ввести компоненты вектора правой части:

Ячейка	**Значение**	**Ячейка**	**Значение**	**Ячейка**	**Значение**
E6	0	E7	1	E8	-2

Таблица 1..

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Решение систем уравнений. Обращение матрицы							
2								
3		Ax=b						
4								
5	Исходная матрица A				Правая часть (b)			
6	-8	1	2		0			
7	5	7	-3		10			
8	2	1	-2		-2			
9								
10	Обратная матрица (1/A)				Вектор решения x=(1/A)/b			
11	-0,149	0,054	-0,230		1			
12	0,054	0,162	-0,189		2			
13	-0,122	0,135	-0,824		3			

Далее необходимо обратить матрицу A и умножить вектор $\bar{b}$ на матрицу, обратную к A. Применяемая для обращения матрицы функция **МОБР** возвращает массив значений, который вставляется сразу в целый столбец ячеек.

4. Для вычисления обратной матрицы нужно выполнить операции:

а) В ячейку A10 ввести текст «Обратная матрица (1/A)».

б) Выделить ячейки A11 :C13, куда будет помещена обратная матрица.

в) Щелкнуть по пиктограмме **Мастер функций** f.

г) В первом окне Мастера функций выбрать категорию **Математические** ,функцию **МОБР.**

д) Во втором окне Мастера функций ввести адрес массива исходной матрицы A6:C8. Нажать одновременно клавиши Ctrl+ Shift+Enter для вставки этой формулы во все выбранные ячейки A11 :C13.

5. Для умножения обратной матрицы на столбец свободных членов:

а) В ячейку E10 ввести «Вектор решения x =(1/A)b»;

б) выделить ячейки E11 :E13;

в) щелкнуть по пиктограмме **Мастер функций;**

г) выбрать категорию **Математические,** функцию **МУМНОЖ;**

д) ввести формулу =МУМНОЖ(A11:C13; E6:E8);

е) затем нажать «Ctrl + Shift + Enter» для вставки формулы во все выделенные ячейки.

Рабочий лист к этому моменту должен выглядеть так, как показано в табл.1 (режим показа формул - табл.2). В ячейках E11-E13 должны стоят значения компонентов вектора решения x_1 x_2, x_3 (в данном примере это числа (1;2;3)).

Используя табл. 1, методом обратных матриц решить систему уравнений, выбранную из табл. 3 по последней цифре шифра для индивидуального задания.

Таблица 2

	A	B	C	D	E
1	Решение систем уравнений. Обращение матрицы				
3		Ax=b			
4					
5	Исходная матрица A				Правая часть (b)
6	-8	1	2		0
7	5	7	-3		10
8	2	1	-2		-2
9					
10	Обратная матрица (1/A)				Вектор решения
11	=МОБР(A6:C8)	=МОБР(A6:C8)	=МОБР(A6:C8)		=МУМНОЖ(A11:C13;E6:E8)
12	=МОБР(A6:C8)	=МОБР(A6:C8)	=МОБР(A6:C8)		=МУМНОЖ(A11:C13;E6:E8)
13	=МОБР(A6:C8)	=МОБР(A6:C8)	=МОБР(A6:C8)		=МУМНОЖ(A11:C13;E6:E8)

Пример 3 Решите системы линейных уравнений матричным методом в Excel

Таблица 3

№ вар.	Система линейных уравнений	№ вар.	Система линейных уравнений
1	$\begin{cases} 2{,}7x_1+3{,}3x_2+1{,}3x_3=2{,}10, \\ 3{,}5x_1+1{,}7x_2+2{,}8x_3=1{,}7, \\ 4{,}1x_1+5{,}8x_2-1{,}7x_3=0{,}8. \end{cases}$	6	$\begin{cases} 1{,}7x_1+2{,}8x_2+1{,}9x_3=0{,}7, \\ 2{,}1x_1+3{,}4x_2+1{,}8x_3=1{,}1, \\ 4{,}2x_1-1{,}7x_2+1{,}3x_3=2{,}8. \end{cases}$
2	$\begin{cases} 0{,}3x_1+0{,}7x_2+0{,}6x_3=0, \\ 0{,}7x_1-0{,}6x_2-0{,}2x_3=0{,}2, \\ 1{,}2x_1-2{,}4x_2+0{,}7x_3=1{,}3. \end{cases}$	7	$\begin{cases} 9{,}1x_1+5{,}6x_2+7{,}8x_3=9{,}8, \\ 3{,}8x_1+5{,}1x_2+2{,}8x_3=6{,}7, \\ 4{,}1x_1+5{,}7x_2+1{,}2x_3=5{,}8. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 0{,}1x_1+4{,}6x_2+7{,}8x_3=9{,}8, \\ 2{,}8x_1+6{,}1x_2+2{,}8x_3=6{,}7, \\ 4{,}5x_1+5{,}7x_2+1{,}2x_3=5{,}8. \end{cases}$	8	$\begin{cases} 3{,}1x_1+2{,}8x_2+1{,}9x_3=0{,}2, \\ 1{,}9x_1+3{,}1x_2+2{,}1x_3=2{,}1, \\ 7{,}5x_1+3{,}8x_2-4{,}8x_3=5{,}6. \end{cases}$
4	$\begin{cases} 5{,}4x_1+2{,}3x_2+3{,}4x_3=3{,}5, \\ 4{,}2x_1+1{,}7x_2-2{,}3x_3=2{,}7, \\ 3{,}4x_1+2{,}4x_2+7{,}4x_3=1{,}9. \end{cases}$	9	$\begin{cases} 3{,}8x_1+6{,}7x_2-1{,}2x_3=5{,}2, \\ 4{,}5x_1-2{,}8x_2+6{,}7x_3=2{,}6, \\ 5{,}1x_1+3{,}7x_2-1{,}4x_3=-0{,}14. \end{cases}$
5	$\begin{cases} 9{,}1x_1+5{,}6x_2+7{,}8x_3=9{,}8, \\ 3{,}8x_1+5{,}1x_2+2{,}8x_3=6{,}7, \\ 4{,}1x_1+5{,}7x_2+1{,}2x_3=5{,}8. \end{cases}$	10	$\begin{cases} 2{,}8x_1+6{,}7x_2-1{,}2x_3=5{,}2, \\ 3{,}5x_1-2{,}8x_2+6{,}7x_3=2{,}6, \\ 1{,}1x_1+2{,}7x_2-1{,}4x_3=-0{,}14. \end{cases}$

3 РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КРАМЕРА

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (10)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1k}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2k}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nk}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots b_1\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots b_2\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots b_n\ldots a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (11)$$

Определителем системы (10) называется определитель матрицы из коэффициентов уравнений этой системы. Обозначим его буквой Δ. Определитель, полученный из определителя системы заменой столбца из коэффициентов при неизвестной x_k свободными членами, обозначим через Δ_k, где k-одно из чисел $1,2,\ldots,n$ (способы вычисления Δ рассматриваются в методических указаниях «Матрицы и определители»)

Теорема 2. *Если определитель системы (10) отличен от нуля, то система имеет единственное решение*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \qquad (12)$$

где Δ и Δ_k определены формулами (11).

Замечание. Линейная система, определитель которой отличен от нуля, называется *невырожденной*. Таким образом, невырожденная система имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера.

Решить системы методом Крамера.

Пример 1

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 7, \\ 4x_1 + 3x_2 = 1. \end{cases}$$

Составим определитель Δ данной системы и определители Δ_k $(k=1,2)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Так как $\Delta=5, \Delta_1=20, \Delta_2=-25$, то по формулам (10) получаем

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{5} = 4,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-25}{5} = -5.$$

Пример 2

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 7, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases}$$

Составим определитель системы и определители Δ_k *(k=1,2,3)*:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 7 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 7 & -3 & 7 \\ 6 & -4 & 5 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 7 \\ 3 & 6 & 5 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 7 \\ 3 & -4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Определитель системы $\Delta=-6\neq0$, т.е. выполнено условие теоремы 1. Вычисляем определители Δ_1, Δ_2, Δ_3, получаем $\Delta_1=-18$, $\Delta_2=-12$, $\Delta_3=-6$. Система имеет единственное решение:

$$x_1 = \frac{-18}{-6} = 3, \quad x_2 = \frac{-12}{-6} = 2, \quad x_3 = \frac{-6}{-6} = 1.$$

Далее рассмотрим примеры на определение совместимости системы линейных уравнений.

Пример 3

$$\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 = 5, \\ 3x_1 + 6x_2 = 9. \end{cases}$$

Запишем основную матрицу A и расширенную матрицу $\tilde{A}$ данной системы:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 7 & -2 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{array}\right].$$

Очевидно, rang A=2 и rang $\tilde{A}$=2. Так как rang A= rang $\tilde{A}$, то система совместна.

Пример 4

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 = 3. \end{cases}$$

В данном примере

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -6 & 3 \end{array}\right].$$

Поскольку *det* $A=0$, то *rang* $A=1$. В матрице $\tilde{A}$ имеются миноры второго порядка, отличные от нуля, поэтому rang $\tilde{A}=2$. Так как *rang* $A\neq$ *rang* $\tilde{A}$, то система не совместна.

Пример 5

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2, \\ 2x_1-3x_2+4x_3=9, \\ 3x_1+2x_2+5x_3=6. \end{cases}$$

Запишем основную матрицу A и расширенную матрицу $\tilde{A}$ данной системы:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 6 \end{array}\right].$$

Поскольку *det* $A\neq0$, т.е.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-10+2=-8.$$

то *rang* $A=3$. Очевидно, *rang* $\tilde{A}=3$. Система совместна.

4 ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Совместная система может иметь единственное решение (в этом случае ее называют *определенной*) или более одного решения (тогда она называется *неопределенной*). Нас интересует вопрос о том, при каком условии линейная система имеет единственное решение. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 3. *Если ранг матрицы совместной линейной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.*

Пример 1

$$\begin{cases} x_1+x_2=2, \\ 4x_1+5x_2=9, \\ 2x_1+3x_2=5. \end{cases}$$

Составим матрицу A и расширенную матрицу $\tilde{A}$ этой системы трёх уравнений ($m=3$) с двумя неизвестными ($n=2$). Преобразуем матрицу $\tilde{A}$:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right], \ \det\tilde{A}=0.$$

Поскольку $r=\tilde{r}=2$, где $\tilde{r}$ – ранг матрицы $\tilde{A}$, система имеет единственное решение, т.е. является определённой.

Пример 2

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=2, \\ 2x_1+3x_2+5x_3=3, \\ 4x_1+3x_2+6x_3=8, \\ 3x_1+2x_2+7x_3=9. \end{cases}$$

Составим матрицы A и $\tilde{A}$, выполним эквивалентные преобразования:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-1$$

От матрицы A перешли к треугольной матрице, составляя линейные комбинации с элементами строк. Первую строку умножили на (-2) и сложили со второй строкой, затем вторую строку умножили на (-4) и сложили с третьей, первую умножили на (-3) и сложили с четвертой.

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 9 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & - \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Отсюда видно, что $r=3$, $\tilde{r}=3$, т.е. $r=\tilde{r}$; система совместна. Поскольку число n неизвестных также равно 3, то система является определённой.

5 МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ИСКЛЮЧЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ (МЕТОД ГАУССА)

Рассмотрим еще один метод решения линейных систем, называемый *методом последовательного исключения неизвестных* или *методом Гаусса*. Этот метод в общем виде впервые предложил немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (1777—1855).

Решая систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса, преобразования совершают не над уравнениями, а над матрицей из коэффициентов при неизвестных и свободных членов (расширенной матрицей системы), т.е. рассматривая матрицу

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} & & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} & & b_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} & & b_m \end{array}\right],$$

где вертикальной чертой отделен столбец, составленный из свободных членов. С помощью элементарных преобразований эту матрицу можно привести к одному из трех видов: «треугольной», трапециевидной или к матрице, одна строка которой состоит из нулей, кроме отличного от нуля числа в столбце для свободных членов.

Пример 1

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 9. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы и преобразуем её:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 5 \\ 2 & -7 & 2 & 3 \\ 3 & -8 & 4 & 9 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 4 & -5 & -6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 11 & 22 \end{array}\right].$$

Вторая матрица получена из первой в результате следующих действий:

1) вторая строка сложена с первой, умноженной на (-2);
2) третья строка сложена с первой, умноженной на (-3);
3) третья матрица получена со второй матрицы – вторая строка умножена на (-4) и прибавлена к третьей строке.

Последней матрице соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_2 - 4x_3 = -7, \\ 11x_3 = 22. \end{cases}$$

Из третьего уравнения находим $x_3 = 2$. Второе уравнение даёт возможность определить x_2: $x_2 = 4x_3 - 7$; так как $x_3 = 2$ то $x_2 = 1$. Из первого уравнения находим: $x_1 = 4x_2 - 3x_3 + 5, x_1 = 3$. Следовательно, полученная система имеет решение: $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 2$. Это же решение имеет и исходная система.

Пример 2

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2, \\ 4x_1 - 9x_2 + x_3 - 8x_4 = -3, \\ x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 8x_4 = 4. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы и преобразуем её, прибавляя к первой строке вторую и четвертую, умноженные соответственно на числа (-2), (-4), -(1) .

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & -2 & 2 \\ 4 & -9 & 1 & -8 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & 8 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -15 & 4 & -7 \\ 0 & -8 & 8 & -11 & -3 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & -32 & 21 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 8.2 & 8.2 \end{array}\right].$$

Последняя матрица получена из предыдущей путём умножения третьей строки на $\left(-\frac{32}{20}\right) = -\frac{8}{5}$ и прибавления к четвёртой строке.

Этой матрице соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ -20x_3 + 8x_4 = -7, \\ 8{,}2x_4 = 8{,}2. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим: $x_4 = 1$, $20x_3 = 8x_4 + 7 = 15$ $x_3 = \frac{3}{4}$,

$x_2 = 5x_3 - 4x_4 = 5\frac{3}{4} - 4 \cdot 1 = -\frac{1}{4}$, $x_1 = 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 1 = 2\left(-\frac{1}{4}\right) - 4\left(\frac{3}{4}\right) + 3 \cdot 1 + 1 = \frac{1}{2}$.

Следовательно, данная система имеет единственное решение

$x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{4}$, $x_3 = \frac{3}{4}$, $x_4 = 1$.

Пример 3

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 6. \end{cases}$$

Записывая соответствующую матрицу и совершая преобразования, умножаем поочередно первую строку на (-2), (-3), (-4) и складываем со второй, третьей и четвертой строками, получаем

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & -6 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & -5 & 6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & -9 & -9 \\ 0 & -1 & 1 & -9 & -10 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -9 & -9 \\ 0 & -1 & 1 & -9 & -10 \\ 0 & -3 & 1 & -4 & -6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 23 & 21 \end{array}\right].$$

Третья матрица получена из предыдущей перестановкой последних трёх строк. Последней матрице соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ -x_2 + x_3 - 9x_4 = -9, \\ 0 \cdot x_4 = -1, \\ -2x_3 + 23x_4 = 21. \end{cases}$$

Эта система несовместна, так как никакие значения неизвестных не могут удовлетворить её третьему уравнению.

Следовательно, исходная система также несовместна.

Замечание. Если в процессе преобразования матрицы системы получится строка, в которой равны нулю все элементы, за исключением одного, соответствующего свободному члену, то такая система несовместна.

Пример 4

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 + 19x_3 + x_4 = 8, \\ 6x_1 - 5x_2 + 11x_3 - 3x_4 = -3. \end{cases}$$

Составляем матрицу и преобразуем её:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 8 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 19 & 1 & 8 \\ 6 & -5 & 11 & -3 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -9 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & -31 & 9 & -15 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & -37 & 9 & -18 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Последняя матрица получена в результате сложения четвертой строки и третьей строки, умноженной на (-1). Этой матрице соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 2, \\ -x_2 - 6x_3 = -3, \\ -45x_3 + 9x_4 = -18, \\ 8x_3 = 0, \end{cases}$$

имеющая решение: $x_3 = 0$, $x_4 = -2$, $x_2 = 3$, $x_1 = 1$.

Пример 5

$$\begin{cases} 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 6 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 6x_1 + 5x_2 + 13x_3 - 8 = 0. \end{cases}$$

Данная система является неоднородной. Коэффициент при x_1 в первом уравнении равен нулю, т.е. $a_{11}=0$. Чтобы применить метод Гаусса, необходимо поменять местами, например, первое и второе уравнения и перенести свободные члены в правые части:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_2 + 4x_3 - 3x_1 = 6, \\ 6x_1 + 5x_2 + 13x_3 = 8. \end{cases}$$

Это неоднородная система трёх уравнений относительно четырёх неизвестных. Составляем матрицу и преобразуем её:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & 6 \\ 6 & 5 & 13 & 0 & 8 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & 8 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Отсюда видно, что система несовместна, так как последняя строка третьей матрицы соответствует уравнению, которому не могут удовлетворить никакие значения неизвестных.

6 Примеры для самостоятельного решения

1. Решите системы линейных уравнений методом Крамера:

1	$\begin{cases}3x_1+2x_2=4,\\7x_1+6x_2=8.\end{cases}$	2	$\begin{cases}8x_1-x_2=5,\\9x_1-2x_2=3.\end{cases}$
3	$\begin{cases}7x_1+3x_2=1,\\9x_1+5x_2=7.\end{cases}$	4	$\begin{cases}3x_1+2x_2=-7,\\4x_1+3x_2=-10.\end{cases}$
5	$\begin{cases}5x_1+2x_2=3,\\7x_1+6x_2=5.\end{cases}$	6	$\begin{cases}6x_1+2x_2=3,\\9x_1+4x_2=5.\end{cases}$
7	$\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=10,\\4x_1+x_2+2x_3=12,\\5x_1+3x_2+x_3=14.\end{cases}$	8	$\begin{cases}5x_1+4x_2+3x_3=4,\\6x_1+5x_2+2x_3=3,\\9x_1+8x_2+5x_3=6.\end{cases}$
9	$\begin{cases}3x_1+x_2+2x_3=3,\\2x_1+5x_2+4x_3=1,\\x_1+8x_2+3x_3=4.\end{cases}$	10	$\begin{cases}x_1+x_2+3x_3=2,\\4x_1+x_2+6x_3=5,\\8x_1+3x_2+2x_3=3.\end{cases}$
11	$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=3,\\2x_1+5x_2+3x_3=1,\\3x_1+2x_2+2x_3=8.\end{cases}$	12	$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=2,\\3x_1+3x_2+2x_3=6,\\2x_1-4x_2+x_3=9.\end{cases}$
13	$\begin{cases}x_1+x_2+4x_3=1,\\x_1+4x_2+6x_3=0,\\2x_1+8x_2+4x_3=-2.\end{cases}$	14	$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3=2,\\2x_1+x_2+4x_3=1,\\3x_1+4x_2+6x_3=4.\end{cases}$
15	$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=2,\\x_1-x_2+x_3-x_4=14,\\x_1+2x_2+3x_3+5x_4=-4,\\2x_1+x_2-x_3-2x_4=7.\end{cases}$	16	$\begin{cases}x_1+3x_2+6x_3+4x_4=4,\\2x_1-6x_2+5x_3-7x_4=5,\\x_1+2x_2+3x_3+9x_4=10,\\3x_1-x_2+8x_3-8x_4=2.\end{cases}$

17	$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1,\\2x_1+x_2+8x_3+3x_4=-2,\\3x_1+2x_2+x_3+2x_4=3,\\4x_1+2x_2+4x_3+x_4=0.\end{cases}$	18	$\begin{cases}4x_1+2x_2+7x_3+x_4=4,\\2x_1+x_2+8x_3+2x_4=2,\\3x_1+3x_2+x_3-x_4=7,\\5x_1-5x_2+6x_3-4x_4=3.\end{cases}$
19	$\begin{cases}x_1+3x_2+x_3+4x_4=0,\\2x_1+6x_2+4x_3+8x_4=-1,\\4x_1+9x_2+2x_3+12x_4=1,\\3x_1+3x_2+3x_3+4x_4=0.\end{cases}$	20	$\begin{cases}x_1-4x_2+4x_3-3x_4=2,\\x_1+2x_2+x_3+2x_4=0,\\2x_1+2x_2-x_3+x_4=4,\\x_1+4x_2-2x_3+x_4=3.\end{cases}$

Выясните, совместна ли каждая из систем:

1	$\begin{cases}3x_1-4x_2=7,\\5x_1-3x_2=8.\end{cases}$	**2**	$\begin{cases}4x_1+2x_2=5,\\8x_1+4x_2=3.\end{cases}$
3	$\begin{cases}2x_1+x_2=4,\\3x_1+2x_2=7,\\x_1+x_2=3.\end{cases}$	**4**	$\begin{cases}x_1-2x_2=3,\\2x_1-3x_2=5,\\3x_1-5x_2=4.\end{cases}$
5	$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=3,\\x_1+2x_2+5x_3=8,\\2x_1+x_2+4x_3=7.\end{cases}$	**6**	$\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=2,\\5x_1-2x_2-3x_3=5,\\4x_1-3x_2-x_3=4.\end{cases}$
7	$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=6,\\2x_1+x_2+2x_3=5,\\3x_1+3x_2+5x_3=11.\end{cases}$	**8**	$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=4,\\2x_1+3x_2+x_3=6,\\3x_1+4x_2+3x_3=9.\end{cases}$
9	$\begin{cases}2x_1+2x_2+x_3=2,\\3x_1+x_2+2x_3=5,\\5x_1+3x_2+3x_3=7.\end{cases}$	**10**	$\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3=4,\\2x_1+5x_2+3x_3=7,\\3x_1+6x_2+2x_3=8.\end{cases}$

2. Решите системы линейных уравнений методом Гаусса

1	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 2, \\ 5x_1 - 9x_2 - 6x_3 = 1. \end{cases}$	2	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$
3	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4. \\ 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 - 10x_3 = 5. \end{cases}$	4	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 9x_3 = 3. \end{cases}$
5	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3. \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 8. \end{cases}$	6	$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 8x_3 = 5, \\ 2x_1 - 7x_2 + 9x_3 = 1. \\ 3x_1 - 6x_2 + 7x_3 = 4. \end{cases}$
7	$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 4, \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$	8	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3. \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 1. \end{cases}$
9	$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 6. \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 7. \end{cases}$	10	$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 3, \\ 5x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 7. \end{cases}$
11	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 3. \end{cases}$	12	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 2, \\ 8x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 3. \end{cases}$

Библиографический список

1. Башмакова, И.Г. Становление алгебры /И.Г. Башмакова// Новое о жизни, науке и технике. Сер. «Матем. Кибернетика», 1999.
2. Хелли, Дэн Линейная алгебра (для экономистов)/Дэн Хелли.- М.: Мир, 1996.
3. Гусак, А.А. Алгебраические уравнения/А.А Гусак.- М.: Высшая школа, 2001.
4. Гильберт, А. Как работать с матрицами/А.Гильберт.- М.: Статистика, 2001.
5. Боревич, З.И. Определители и матрицы/З.И. Боревич. -М.: Статистика, 2001.
6. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц /Ф.Р. Гантмахер.- М.: Наука, 1997.

Оглавление