Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
“Самарский государственный архитектурно-строительный
университет”

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методические указания

Часть I

Случайная величина

Самара 2004

декабрь 2004г. 29,00

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

Н.А. Беликова, А.Н. Беликов,
В.В. Горелова, О.В. Юсупова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методические указания

Часть I
Случайная величина

Утверждены редакционно-издательским
советом университета 2 марта 2004 г.

САМАРА 2004

Составители: Н.А. Бечкова, А.И. Бечков,
Е.Б. Горелова, О.В. Юсупова

УДК 51[illegible](09)

Теория вероятностей: Методические указания / Сост. *Н.А. Бечкова, А.И. Бечков, Е.Б. Горелова, О.В. Юсупова*; СГАСУ. Самара, 2004. – [illegible]с.

Методические указания разработаны для студентов очной и заочной форм обучения, изучающих курс теории вероятностей.

Номер лицензии на издательскую деятельность
ЛР № 020726 от 25.02.1998 года

§1. Основные понятия теории вероятностей. Непосредственный подсчёт вероятностей

Существует целый класс опытов, для которых вероятности их возможных исходов легко оценить непосредственно из условий самого опыта. Для этого нужно, чтобы различные исходы опыта обладали симметрией и в силу этого были объективно одинаково возможными.

Рассмотрим, например, опыт, состоящий в бросании игральной кости, т. е. симметричного кубика, на гранях которого нанесено различное число очков: от 1 до 6.

В силу симметрии кубика есть основания считать все шесть возможных исходов опыта одинаково возможными. Именно это даёт право предполагать, что при многократном бросании кости все шесть граней будут выпадать примерно одинаково часто. Это предположение для правильно выполненной кости действительно оправдывается на опыте; при многократном бросании кости каждая её грань появляется примерно в одной шестой доле всех случаев бросания, причём отклонение этой доли от 1/6 тем меньше, чем большее число опытов произведено. Имея в виду, что вероятность достоверного события принята равной единице, естественно приписать выпадению каждой отдельной грани вероятность, равную 1/6. Это число характеризует некоторые объективные свойства данного случайного явления, а именно свойство симметрии шести возможных исходов опыта.

Для всякого опыта, в котором возможные исходы симметричны и одинаково возможны, можно применить аналогичный приём, который называется *непосредственным подсчётом вероятностей.*

Предварительно введём некоторые вспомогательные понятия.

Событием называется всякий факт, который может произойти в результате опыта.

Вероятностью события называется численная мера степени объективной возможности этого события. Вероятность события A обозначается $P(A)$.

Достоверным называется событие F, которое в результате опыта непременно должно произойти:

$$P(F) = 1.$$

Невозможным называется событие E, которое в результате опыта не может произойти:

$$P(E) = 0.$$

Вероятность любого события A заключена между нулём и единицей:

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Несколько событий в данном опыте образуют **полную группу событий**, если в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них. Примеры событий, образующих полную группу:

1) выпадение герба и выпадение цифры при бросании монеты;
2) попадание и промах при выстреле;
3) появление 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков при бросании игральной кости

и другие.

Несколько событий называются **несовместными** в данном опыте, если никакие два из них не могут появиться вместе. Примеры несовместных событий:

1) выпадение герба и выпадение цифры при бросании монеты;

2) попадание и промах при одном выстреле;

3) появление 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков при одном бросании игральной кости

и другие.

Несколько событий в данном опыте называются **равновозможными**, если по условиям симметрии опыта нет основания считать какое-либо из них более возможным, чем любое другое. Примеры равновозможных событий:

1) выпадение герба и выпадение цифры при бросании монеты;

2) появление 1, 3, 4, 5 очков при одном бросании игральной кости;

3) появление карты бубновой, червонной, трефовой масти при вынимании карты из колоды

и другие.

Если несколько событий: 1) образуют полную группу; 2) несовместны; 3) равновозможны, то они называются **случаями** (или «шансами»).

Если какой-либо опыт по своей структуре обладает симметрией возможных исходов, то случаи представляют собой исчерпывающую систему равновозможных и исключающих друг друга исходов опыта. Про такой опыт говорят, что он сводится к «схеме случаев» (иначе – к «схеме урн»).

Данная схема по преимуществу имеет место в искусственно организованных опытах, в которых заранее и сознательно обеспечена одинаковая возможность исходов опыта (пример тому – азартные игры). Для таких опытов возможен непосредственный подсчёт вероятностей, основанный на оценке доли так называемых «благоприятных» случаев в общем числе случаев.

Случай называется **благоприятствующим событию** A, если появление этого случая влечёт за собой появление события A.

Если опыт сводится к схеме случаев, то вероятность события A вычисляется по формуле:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \qquad (1)$$

где n – общее число случаев, m – число случаев, благоприятствующих событию A.

Формула (1) носит название «классической формулы» для вычисления вероятностей.

<u>**Задача 1.1.**</u> Образуют ли полную группу следующие группы событий:

а) опыт: бросание монеты;
события: A_1 – появление герба,
A_2 – появление цифры.

б) опыт: бросание двух монет;
события: B_1 – появление двух гербов,
B_2 – появление двух цифр.

в) опыт: два выстрела по мишени;
события: A_0 – ни одного попадания,
A_1 – одно попадание,
A_2 – два попадания.

г) опыт: два выстрела по мишени;
события: C_1 – хотя бы одно попадание,
C_2 – хотя бы один промах.

К ответам дайте пояснения.

<u>**Задача 1.2.**</u> Являются ли несовместными следующие события:

а) опыт: бросание монеты;
события: A_1 – появление герба,
A_2 – появление цифры.

б) опыт: бросание двух монет;
события: B_1 – появление герба на первой монете,
B_2 – появление цифры на второй монете.

в) опыт: два выстрела по мишени;
события: C_0 – ни одного попадания,
C_1 – одно попадание,
C_2 – два попадания.

г) опыт: два выстрела по мишени;
события:: D_1 – хотя бы одно попадание,
D_2 – хотя бы один промах.

К ответам дайте пояснения.

<u>**Задача 1.3.**</u> Являются ли равновозможными следующие события:

а) опыт: бросание симметричной монеты;
события: A_1 – появление герба,
A_2 – появление цифры.

б) опыт: бросание неправильной (погнутой) монеты;
события: B_1 – появление герба,
B_2 – появление цифры.

в) опыт: выстрел по мишени;
события: C_1 – попадание,
C_2 – промах.

г) опыт: бросание двух монет;
события: D_1 – появление двух гербов,
D_2 – появление двух цифр,
D_3 – появление одного герба и одной цифры.

д) опыт: вынимание одной карты из колоды;
события: E_1 – появление карты червонной масти,
E_2 – появление карты бубновой масти,
E_3 – появление карты трефовой масти.

К ответам дайте пояснения.

<u>**Задача 1.4.**</u> В урне 4 белых и 5 чёрных шаров. Из урны вынимают наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар – белый.

Решение.

Обозначим A – событие, состоящее в появлении белого шара. Общее число случаев $n = 9$; число случаев, благоприятствующих событию A, $m = 4$.

Следовательно,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{9}.$$

§2. Элементы комбинаторики

Для решения ряда задач с использованием формулы (1) требуются знания из раздела математики «Соединения». Приведём некоторые сведения из этого раздела.

Размещениями из n элементов по m называются такие их соединения, которые отличаются друг от друга самими элементами или их порядком. Например, размещения из 3 элементов a, b, c по 2: ab, ac, bc, ba, ca, cb. Число всех размещений из n различных элементов по m (обозначается A_n^m):

$$A_n^m = \underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}_{\text{всего } m \text{ множителей}} = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Например, $A_3^2 = 3\cdot 2 = 6$.

Перестановками из n элементов называются такие их соединения, которые отличаются друг от друга только порядком входящих в них элементов. Например, перестановки из трёх элементов a, b и c: abc, bca, cab, cba, bac, acb. Число всех перестановок из n различных элементов (обозначается P_n):

$$P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n = n!$$

Сочетаниями из n элементов по m называются такие их соединения, которые отличаются друг от друга только самими элементами. Например: сочетания из трёх элементов a, b, c по 2: ab, ac, bc. Число всех сочетаний из n различных элементов по m (обозначается C_n^m):

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Задача 2.1. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «книга». Ребёнок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность p того, что у него снова получилось слово «книга».

Решение.

Событие A – снова получилось слово «книга».

Общее число случаев $n = P_5 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$.

Благоприятствующих событию A случаев $m = 1$.

$$P(A) = \frac{1}{120}.$$

Задача 2.2. На каждой из 6 одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: А, Т, М, Р, С, О. Карточки тщательно перемешиваются. Найти вероятность того, что на четырёх, вынутых по одной и расположенных в одну линию, карточках можно будет прочесть слово «трос».

Решение.

Событие A – можно прочесть слово «трос».

Общее число случаев $n = A_6^4 = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 360$

Случаев, благоприятствующих событию A, $m = 1$

$$P(A) = \frac{1}{360}$$

Задача 2.3. В урне было 4 белых и 5 чёрных шаров. Из урны вынимают сразу два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

Решение.

Обозначим событие A – вынуты два белых шара.

Общее число случаев

$$n = C_9^2 = \frac{A_9^2}{P_2} = \frac{9\cdot 8}{1\cdot 2} = 36.$$

Число благоприятствующих случаев

$$m = C_4^2 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6,$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Задача 2.4. В урне 4 белых и 5 чёрных шаров. Из урны вынимают сразу 5 шаров. Найти вероятность того, что два из них будут белыми, а три – чёрными.

Решение.

$$n = C_9^5 = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 126,$$

$$m = C_4^2\cdot C_5^3 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 60,$$

$$P = \frac{m}{n} = \frac{60}{126} = \frac{10}{21}.$$

Задача 2.5. В урне 4 белых и 5 чёрных шаров. Из урны вынимают одновременно два шара. Какое событие более вероятно:

A – шары одного цвета,

B – шары разных цветов?

Решение.

Воспользуемся классической формулой вероятности: $p = \dfrac{m}{n}$.

Для события A: $m = m_1 + m_2$, где

$m_1 = C_4^2 = 6$ – количество возможных исходов: два шара белые;

$m_2 = C_5^2 = 10$ – количество возможных исходов: два шара чёрные;

$$P(A) = \frac{C_4^2 + C_5^2}{C_9^2} = \frac{6}{C_9^2}.$$

Для события B: $m = m_1\cdot m_2$, где

$m_1 = C_4^1 = 4$ – число возможных исходов: только один шар белый;

$m_2 = C_5^1 = 5$ – число возможных исходов: только один шар чёрный;

$$P(B) = \frac{C_4^1\cdot C_5^1}{C_9^2} = \frac{20}{C_9^2},$$

Следовательно,

$$P(B) > P(A).$$

Задача 2.6. В урне 4 белых и 5 чёрных шаров. Из урны вынимают один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался белым. После этого из урны берут ещё один шар. Найти вероятность того, что этот шар тоже будет белым.

Задача 2.7. В партии, состоящей из 16 изделий, имеется 4 дефектных. Из партии выбираются для контроля 5 изделий. Найти вероятность того, что из них ровно 2 изделия будут дефектными.

Задача 2.8. Игральная кость бросается один раз. Найти вероятности следующих событий:
A – появление чётного числа очков;
B – появление не менее 5 очков;
C – появление не более 5 очков.
Задача 2.9. Бросаются две монеты. Какое из событий является наиболее вероятным:
A – монеты лягут одинаковыми сторонами;
B – монеты лягут разными сторонами?

§3. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Способы непосредственного определения вероятностей с помощью «классической формулы» для вероятности события не являются основными в теории вероятностей: их применение не всегда удобно и не всегда возможно. Даже когда событие сводится к схеме случаев, зачастую эта схема бывает слишком сложна, и непосредственный подсчёт вероятности по формуле (1) становится чрезмерно громоздким. На практике обычно требуется определять вероятности событий, непосредственное экспериментальное воспроизведение которых затруднительно. Например, если требуется определить вероятность не разрушения какой-либо детали или конструкции, ясно, что определение этой вероятности по частоте практически невозможно. И не только потому, что такие опыты оказались бы непомерно сложными и дорогостоящими, а ещё и потому, что часто требуется оценить вероятность того или иного исхода опыта не для существующих образцов техники, а для перспективных, проектируемых. Обычно такая оценка и производится для того, чтобы выявить наиболее рациональные конструктивные решения. Поэтому, как правило, для определения вероятностей событий применяются не непосредственные прямые методы, а косвенные, позволяющие по известным вероятностям одних событий определять вероятности других событий, с ними связанных. Применяя эти косвенные методы, мы будем пользоваться *основными теоремами* теории вероятностей. Этих теорем две: теорема сложения вероятностей и теорема умножения вероятностей.

Суммой двух событий A и B называется событие C, состоящее в появлении хотя бы одного из событий A и B.

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Произведением двух событий A и B называется событие C, состоящее в совместном появлении события A и события B.

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Теорема сложения вероятностей.

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \qquad (2)$$

В случае, когда событие A и B совместны, вероятность их суммы выражается формулой:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB), \qquad (3)$$

где AB – произведение событий A и B.

Вероятность суммы нескольких несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n). \qquad (4)$$

Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ несовместны и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

Противоположными событиями называются два несовместных события, образующих полную группу. Противоположное событие обозначается $\bar{A}$.

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Условной вероятностью события A при наличии B называется вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B произошло. Эта вероятность обозначается $P_B(A)$.

События A и B называются **независимыми**, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого.

Теорема умножения вероятностей.

Для независимых событий A и B: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при наличии первого:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$$

или

$$P(AB) = P(B) \cdot P_B(A).$$

Вероятность произведения нескольких независимых событий:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n).$$

Разберите и решите приведённые ниже задачи.

Задача 3.1. Опыт состоит в бросании двух монет. Рассматриваются следующие события:
A – появление герба на первой монете,
B – появление цифры на первой монете,
C – появление герба на второй монете,
D – появление цифры на второй монете,
E – появление хотя бы одного герба,
F – появление хотя бы одной цифры,
G – появление одного герба и одной цифры,
H – не появление ни одного герба,
K – появление двух гербов.

Определить, каким событиям этого списка равносильны следующие события: 1) $A + C$, 2) AC, 3) EF, 4) $G + E$, 5) GE, 6) BD, 7) $E + K$.

Задача 3.2. По мишени производится три выстрела. Рассматриваются события A_i – попадание при i-м выстреле (i = 1, 2, 3). Представить в виде сумм, произведений или сумм произведений событий A_i и $\overline{A}_i$ следующие события:

1) A – все три попадания,
2) B – все три промаха,
3) C – хотя бы одно попадание,
4) D – хотя бы один промах,
5) E – не меньше двух попаданий,
6) F – не больше одного попадания,
7) G – попадание в мишень не раньше, чем при третьем выстреле.

Задача 3.3. Производится наблюдение за группой, состоящей из четырёх однородных объектов. Каждый из них за время наблюдения может быть обнаружен или не обнаружен. Рассматриваются события:

1) A – обнаружен ровно один из четырёх объектов,
2) B – обнаружен хотя бы один объект,
3) C – обнаружено не менее двух объектов,
4) D – обнаружено ровно два объекта,
5) E – обнаружено ровно три объекта,
6) F – обнаружены все четыре объекта.

Указать, в чём состоят события:

1) $A + B$; 2) AB; 3) $B + C$; 4) BC; 5) $D + E + F$; 6) BF.

Задача 3.4. Назовите события, противоположные для следующих событий:

A – выпадение двух гербов при бросании двух монет;
B – появление белого шара при вынимании одного шара из урны, в которой 2 белых, 3 черных и 4 красных шара;
C – три попадания при трёх выстрелах;
D – хотя бы одно попадание при пяти выстрелах;
E – не более двух попаданий при пяти выстрелах.

Задача 3.5. Опыт состоит в последовательном бросании двух монет. Рассматриваются события:

A – выпадение герба на первой монете;
D – выпадение хотя бы одного герба;
E – выпадение хотя бы одной цифры;
F – выпадение герба на второй монете.

Определите, зависимы или независимы пары событий: 1) A и E; 2) A и F; 3) D и E; 4) D и F.

Определите условные и безусловные вероятности событий в каждой паре.

Задача 3.6. В лотерее 1000 билетов. Из них на один билет падает выигрыш 5000 руб., на 10 билетов - выигрыши по 1000 руб., на 50 билетов – выигрыши по 200 руб., на 100 билетов – выигрыши по 50 руб., остальные билеты невыигрышные. Некто покупает один билет. Найти вероятность выиграть не менее 200 руб.

Решение.

Рассмотрим события:

A – выиграть не менее 200 руб.;
A_1 – выиграть 200 руб.;

A_2 – выиграть 1000 руб.;
A_3 – выиграть 5000 руб.

Очевидно, $A = A_1 + A_2 + A_3$.

Так как события A_1, A_2, A_3 – несовместны, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий: $P(A) =$
$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0{,}050 + 0{,}010 + 0{,}001 = 0{,}061$.

Задача 3.7. В урне 4 белых и 5 чёрных шаров. Из урны вынимают один шар, отмечается его цвет и шар возвращается в урну. После этого из урны берётся ещё один шар. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

Решение.

Обозначим:

A – появление двух белых шаров;

Событие A представляет собой произведение двух событий: $A = A_1 \cdot A_2$,

где A_1 – появление белого шара при первом вынимании; A_2 – появление белого шара при втором вынимании.

События A_1 и A_2 независимы и по теореме умножения вероятностей получаем:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \approx 0{,}198.$$

Задача 3.8. В урне 4 белых и 5 чёрных шаров. Из урны вынимают один шар (не возвращают его назад в урну), затем ещё один шар. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

Решение.

Обозначения событий такие же, как в задаче 3.7. В данном случае события A_1 и A_2 являются зависимыми:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \approx 0{,}167.$$

Задача 3.9. Бросаются две монеты. Рассматриваются события:

A – выпадение герба на первой монете,
B – выпадение герба на второй монете.

Найти вероятность события $C = A + B$.

Решение.

Так как события A и B совместны, то

$$P(C) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

или, через противоположное событие,

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

где $\overline{C}$ – выпадение орла на обеих монетах ($\overline{C} = \overline{A} \cdot \overline{B}$).

Задача 3.10. В урне 4 белых и 5 чёрных шаров. Из урны один за другим вынимают два шара. Найти вероятность того, что эти шары будут разных цветов.

Решение.

Искомое событие может появиться в двух несовместных вариантах:

б.,ч. – 1-ый раз белый; 2-ой раз чёрный, или
ч.,б. – 1-ый раз чёрный; 2-ой раз белый.

По теоремам сложения и умножения вероятностей имеем:

$$P(б.,ч.+ч.,б.)=\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}+\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{5}{9}.$$

Задача 3.11. Производятся три выстрела по одной и той же мишени. Вероятности попадания при первом, втором и третьем выстрелах равны соответственно P_1=0,4; P_2=0,5; P_3=0,7. Найти вероятность того, что в результате этих трёх выстрелов в мишени будет ровно одна пробоина.

Решение.

Событие A – ровно одно попадание в мишень. Это событие может осуществиться несколькими способами, т.е. распадается на несколько несовместных вариантов: а) может быть попадание при первом выстреле, промахи - при втором и третьем или же б) попадание при втором выстреле, промахи - при первом и третьем или, наконец, в) промахи при первом и втором выстрелах и попадание - при третьем. Следовательно,

$$A=A_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3+\overline{A}_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3+\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3,$$

где A_1,A_2,A_3 – попадание при первом, втором, третьем выстрелах, $\overline{A}_1,\overline{A}_2,\overline{A}_3$ – промахи при первом, втором, третьем выстрелах.

Применяя теоремы сложения и умножения вероятностей и пользуясь свойством противоположных событий, находим:

$$P(A)=P(A_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3)=$$
$$=0{,}4\cdot0{,}5\cdot0{,}3+0{,}6\cdot0{,}5\cdot0{,}3+0{,}6\cdot0{,}5\cdot0{,}7=0{,}36.$$

Задача 3.12. В условиях предыдущей задачи (3.11) найти вероятность того, что в мишени будет хотя бы одна пробоина.

Решение.

Событие B – хотя бы одно попадание в мишень. Пользуясь тем же приёмом, который был применён в предыдущей задаче, и теми же обозначениями, можно представить событие B в виде суммы несовместных вариантов:

$$B=A_1\cdot A_2\cdot A_3+A_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3+A_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3+\overline{A}_1\cdot A_2\cdot A_3+$$
$$+A_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3+\overline{A}_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3+\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3,$$

найти вероятность каждого варианта по теореме умножения и все эти вероятности сложить. Однако такой путь решения задачи громоздкий. Целесообразно от события B перейти к противоположному событию:

$\overline{B}$ – ни одного попадания в мишень. Очевидно, $\overline{B}=\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3$.

По теореме умножения

$$P(\overline{B})=P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3)=0{,}6\cdot0{,}5\cdot0{,}3=0{,}09$$

или

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0{,}09=0{,}91.$$

Задача 3.13. Из полной колоды карт (52 карты) вынимают одновременно четыре карты. Рассматриваются события:

A – среди вынутых карт будет хотя бы одна бубновая;

B – среди вынутых карт будет хотя бы одна червонная.

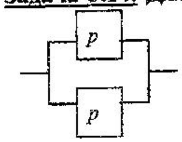
Найти вероятность события $C=A+B$.

Решение.

Найдем вероятность противоположного события $\overline{C}$ – нет ни бубновой, ни червонной карты.

$$P(\overline{C})=\frac{C_{26}^4}{C_{52}^4}=\frac{26\cdot25\cdot24\cdot23}{52\cdot51\cdot50\cdot49}=0{,}055,$$
$$P(C)=1-P(\overline{C})\approx0{,}945.$$

Задача 3.14. Для повышения надёжности прибора он дублируется другим точно таким же прибором. Вероятность безотказной работы (надёжность) каждого прибора равна p. При выходе из строя первого прибора происходит мгновенное переключение на второй. Определить вероятность безотказной работы системы двух дублирующих друг друга приборов.



Решение.

Отказ системы требует совместного отказа обоих приборов. Отказ одного прибора: $q=1-p$. Отказ двух приборов: $q^2=(1-p)^2$.

Вероятность безотказной работы системы двух дублирующих друг друга приборов:

$$P=1-q^2=1-(1-p)^2.$$

Задача 3.15. Из полной колоды карт (52 листа) вынимается одна карта. Рассматриваются события:

A – появление туза,

B – появление карты красной масти,

C – появление бубнового туза,

D – появление десятки.

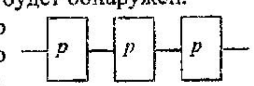
Зависимы или независимы следующие пары событий: 1) A и B, 2) A и C, 3) B и C, 4) B и D?

Задача 3.16. Два стрелка произвели по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,7, а вторым – 0,6. Найти вероятность того, что хотя бы один из стрелков попал в мишень.

Задача 3.17. В урне 4 белых и 5 чёрных шаров. Из урны один за другим вынимают два шара. Найти вероятность того, что второй шар будет белым.

Задача 3.18. При одном цикле обзора радиолокационной станции, следящей за космическим объектом, объект обнаруживается с вероятностью 0,7. Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других. Найти вероятность того, что при 3 циклах объект будет обнаружен.

Задача 3.19. Прибор состоит из трёх блоков. Выход из строя каждого блока означает выход из строя прибора в целом. Блоки выходят из строя независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы (надёжность) каждого блока равна p. Найти надежность P прибора в целом.



Задача 3.20. Над изготовлением изделия работают последовательно трое рабочих. Качество изделия при передаче следующему рабочему не проверяется. Первый рабочий допускает брак с вероятностью p_1, второй – p_2, третий – p_3. Найти вероятность того, что при изготовлении изделия будет допущен брак.

Задача 3.21. При включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью p.
1) Найти вероятность того, что двигатель начнёт работать при втором включении зажигания; 2) Найти вероятность того, что для ввода двигателя в работу придётся включить зажигание не более двух раз.

Задача 3.22. Завод изготовляет определённого типа изделия. Каждое изделие имеет дефект с вероятностью p. Изделие осматривается одним контролёром, который обнаруживает имеющийся дефект с вероятностью p_1. Если же контролёр не обнаружил дефект, то изделие пропускается в готовую продукцию. Кроме того, контролёр может по ошибке забраковать изделие, не имеющее дефекта; вероятность этого равна α. Найти вероятности следующих событий:
A – изделие будет забраковано;
B – изделие будет забраковано, но ошибочно;
C – изделие будет пропущено в готовую продукцию с дефектом.

Задача 3.23. Техническая система состоит из трёх блоков, надёжность каждого из которых равна p. Выход из строя хотя бы одного блока влечёт за собой выход из строя всей системы. С целью повышения надёжности системы производится дублирование, для чего выделено ещё три таких же блока. Надёжность переключающих устройств полная. Определить, какой способ дублирования даёт большую надёжность системы:

а) дублирование каждого блока (рис. 1);

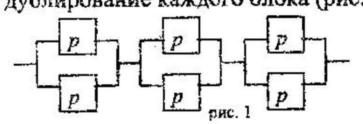


рис. 1

б) дублирование всей системы (рис. 2).

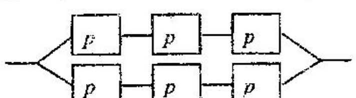


рис. 2

§4. Формула полной вероятности и формула Бейеса

Если об обстановке опыта можно сделать n исключающих друг друга предположений (гипотез) $H_1, H_2, \ldots, H_n$ и если событие A может появиться только при одной из этих гипотез, то вероятность события A вычисляется по **формуле полной вероятности**:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n)\cdot P_{H_n}(A)$$

или

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P_{H_i}(A),$$

где $P(H_i)$– вероятность гипотезы H_i; $P_{H_i}(A)$– условная вероятность события A при этой гипотезе.

Если до опыта вероятности гипотез были $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$, а в результате опыта появилось событие A, то с учётом этого события «новые», т.е. условные вероятности гипотез вычисляются по **формуле Бейеса**:

$$P_{H_i}(A) = \frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}, \quad (i = 1,2,\ldots,n).$$

Формула Бейеса даёт возможность «пересмотреть» вероятности гипотез с учётом наблюденного результата опыта.

Задача 4.1. Имеются три одинаковые с виду урны. В первой – 6 белых шаров и 4 чёрных; во второй – 8 белых и 7 чёрных шаров; в третьей – только белые шары. Некто подходит наугад к одной из урн и вынимает из неё один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Решение.

Пусть событие A – появление белого шара. Формулируем гипотезы:
H_1 – выбор первой урны;
H_2 – выбор второй урны;
H_3 – выбор третьей урны.

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3},$$

$$P_{H_1}(A) = \frac{6}{6+4} = \frac{3}{5}; \quad P_{H_2}(A) = \frac{8}{8+7} = \frac{8}{15}; \quad P_{H_3}(A) = 1.$$

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{8}{15} + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{32}{45}.$$

Задача 4.2. Имеются две урны: в первой a белых шаров и b чёрных; во второй - c белых и d чёрных шаров. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, один шар. После этого из второй урны берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

Решение.

Событие A – появление белого шара.

Гипотезы: H_1 – переложен белый шар;

H_2 – переложен чёрный шар.

$$P(H_1) = \frac{a}{a+b}; \quad P(H_2) = \frac{b}{a+b};$$

$$P_{H_1}(A) = \frac{c+1}{c+d+1}; \quad P_{H_2}(A) = \frac{c}{c+d+1};$$

$$P(A) = \frac{a}{a+b}\cdot\frac{c+1}{c+d+1} + \frac{b}{a+b}\cdot\frac{c}{c+d+1}.$$

Задача 4.3. Имеется две партии однородных изделий. Первая партия состоит из N изделий, среди которых n дефектных. Вторая партия состоит из M изделий, среди которых m дефектных. Из первой партии берётся случайным образом K изделий, а из второй L изделий ($K<N$, $L<M$). Эти $K+L$ изделий смешиваются, и образуется

новая партия. Из новой смешанной партии берётся наугад одно изделие. Найти вероятность того, что изделие будет дефектным.

Решение.

Событие A – изделие будет дефектным.

Гипотезы: H_1 – изделие принадлежит первой партии;

H_2 – изделие принадлежит второй партии.

$$P(H_1)=\frac{K}{K+L};\quad P(H_2)=\frac{L}{K+L};$$

$$P_{H_1}(A)=\frac{n}{N};\quad P_{H_2}(A)=\frac{m}{M};$$

$$P(A)=\frac{K}{K+L}\cdot\frac{n}{N}+\frac{L}{K+L}\cdot\frac{m}{M}.$$

<u>**Задача 4.4.**</u> Прибор состоит из двух дублирующих друг друга узлов I и II (рис. 3) и может случайным образом работать в одном из двух режимов: благоприятном и неблагоприятном. В благоприятном режиме надёжность каждого из узлов равна 0,9, в неблагоприятном – 0,8. Вероятность того, что прибор будет работать в благоприятном режиме равна 0,95, в неблагоприятном – 0,05. Найти полную надёжность прибора p.

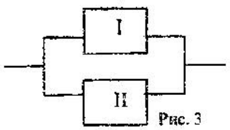


Рис. 3

Решение.

Событие A – полная надёжность прибора.

Гипотезы: B_1 – прибор работает в благоприятном режиме;

B_2 – прибор работает в неблагоприятном режиме.

$$P(B_1)=0{,}95;\quad P(B_2)=0{,}05.$$

Условные вероятности найдём по теореме сложения совместных событий:

$$P_{B_1}(A)=0{,}9+0{,}9-0{,}9^2=0{,}99;$$

$$P_{B_2}(A)=0{,}8+0{,}8-0{,}8^2=0{,}96;$$

$$P(A)=0{,}95\cdot 0{,}99+0{,}05\cdot 0{,}96\approx 0{,}99.$$

<u>**Задача 4.5.**</u> Имеются три урны: в первой из них a белых шаров и b чёрных; во второй - c белых и d чёрных; в третьей - k белых шаров (чёрных нет). Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из неё шар. Этот шар оказался белым. Найти вероятность того, что этот шар вынут из первой, второй или третьей урны.

Решение.

Решаем задачу по формуле Бейеса.

Гипотезы: H_1 – выбор первой урны;

H_2 – выбор второй урны;

H_3 – выбор третьей урны.

До опыта все гипотезы равновероятны:

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}.$$

Наблюдалось событие A – появление белого шар. Находим условные вероятности:

$$P_{H_1}(A)=\frac{a}{a+b};\quad P_{H_2}(A)=\frac{c}{c+d};\quad P_{H_3}(A)=1.$$

По формуле Бейеса вероятность того, что шар был вынут из первой урны:

$$P_{H_1}(A)=\frac{\frac{1}{3}\cdot P_{H_1}(A)}{\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}P_{H_i}(A)}=\frac{\frac{a}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}+1}.$$

Аналогично:

$$P_{H_2}(A)=\frac{\frac{c}{c+d}}{\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}+1};\quad P_{H_3}(A)=\frac{1}{\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}+1}.$$

<u>**Задача 4.6.**</u> Прибор состоит из двух узлов. Работа каждого узла безусловно необходима для работы прибора в целом. Надёжность (вероятность безотказной работы в течение времени t) первого узла равна 0,9, второго – 0,8. Прибор испытывался в течение времени t, в результате чего обнаружено, что он вышел из строя (отказал). Найти вероятность того, что отказал только первый узел, а второй - исправен.

Решение.

До опыта возможны четыре гипотезы:

H_0 – оба узла исправны;

H_1 – первый узел отказал, а второй исправен;

H_2 – первый узел исправен, а второй отказал;

H_3 – оба узла отказали.

Наблюдалось событие A – прибор отказал. Вероятности гипотез:

$$P(H_0)=0{,}9\cdot 0{,}8=0{,}72;\quad P(H_1)=(1-0{,}9)\cdot 0{,}8=0{,}08;$$

$$P(H_2)=0{,}9\cdot(1-0{,}8)=0{,}18;\quad P(H_3)=(1-0{,}9)\cdot(1-0{,}8)=0{,}02.$$

Условные вероятности события A:

$$P_{H_0}(A)=0;\quad P_{H_1}(A)=P_{H_2}(A)=P_{H_3}(A)=1.$$

По формуле Бейеса:

$$P_A(H_1)=\frac{0{,}08}{0{,}72\cdot 0+0{,}08+0{,}18+0{,}02}=\frac{2}{7}.$$

<u>**Задача 4.7.**</u> В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовлены отлично, 4 – хорошо, 2 – посредственно и 1 – плохо. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный – на 16, посредственно – на 10, плохо – на 5 вопросов. Вызванный наугад студент ответил на три произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент подготовлен: а) отлично; б) плохо.

Решение.

Событие A – студент ответил на три вопроса.

Гипотезы: H_1 - студент подготовлен отлично;

H_2 – студент подготовлен хорошо;

H_3 – студент подготовлен посредственно;

H_4 – студент подготовлен плохо.

$$P(H_1)=0{,}3;\quad P(H_2)=0{,}4;\quad P(H_3)=0{,}2;\quad P(H_4)=0{,}1;$$

$$P_{H_1}(A)=1;\quad P_{H_2}(A)=\frac{C_{16}^3}{C_{20}^3}=\frac{16\cdot15\cdot14}{20\cdot19\cdot18}\approx0{,}491;$$

$$P_{H_3}(A)=\frac{C_{10}^3}{C_{20}^3}=\frac{10\cdot9\cdot8}{20\cdot19\cdot18}\approx0{,}105;\quad P_{H_4}(A)=\frac{C_5^3}{C_{20}^3}=\frac{5\cdot4\cdot3}{20\cdot19\cdot18}\approx0{,}009;$$

$$а)\quad P_A(H_1)=\frac{0{,}3\cdot1}{0{,}3\cdot1+0{,}4\cdot0{,}491+0{,}2\cdot0{,}105+0{,}1\cdot0{,}009}\approx0{,}58;$$

$$б)\quad P_A(H_4)=\frac{0{,}1\cdot0{,}009}{0{,}3\cdot1+0{,}4\cdot0{,}491+0{,}2\cdot0{,}105+0{,}1\cdot0{,}009}\approx0{,}002.$$

Задача 4.8. Имеются две урны: в первой 5 белых шаров и 3 чёрных; во второй - 6 белых шаров и 4 чёрных. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, три шара. После этого из второй урны берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

Задача 4.9. Приборы одного наименования изготовляются двумя заводами. Первый завод поставляет $\frac{2}{3}$ всех изделий, поступающих на производство; второй – $\frac{1}{3}$. Вероятность безотказной работы прибора, изготовленного первым заводом, равна p_1, второго – p_2. Определить полную надёжность p прибора, поступившего на производство.

Задача 4.10. Прибор может работать в двух режимах: 1) нормальном и 2) ненормальном. Нормальный режим наблюдается в 80% всех случаев работы прибора; ненормальный – в 20%. Вероятность выхода прибора из строя за время t в нормальном режиме равна 0,1, в ненормальном – 0,7. Найти полную вероятность p выхода прибора из строя за время t.

Задача 4.11. Трое рабочих изготавливают однотипные изделия. Первый рабочий изготовил 40 изделий, второй – 35, третий – 25. Вероятность брака у первого рабочего 0,03, у второго – 0,02, у третьего – 0,01. Взятое наугад изделие оказалось бракованным. Определить вероятность того, что это изделие сделал второй рабочий.

Задача 4.12. На вход радиолокационного устройства с вероятностью p поступает смесь полезного сигнала с помехой, а с вероятностью $(1-p)$ – только одна помеха. Если поступает полезный сигнал с помехой, то устройство регистрирует наличие сигнала с вероятностью p_1, если только помеха – с вероятностью p_2. Известно, что устройство зарегистрировало наличие какого-то сигнала. Найти вероятность того, что в его составе имеется полезный сигнал.

§5. Повторение опытов

Опыты называются **независимыми**, если вероятность того или иного исхода каждого опыта не зависит от того, какие исходы имели другие опыты.

Независимые опыты могут производиться как в одинаковых условиях, так и в различных. В первом случае вероятность появления какого-то события A во всех опытах одна и та же, во втором случае она меняется от опыта к опыту.

Если производится n независимых опытов в одинаковых условиях, причём в каждом из них с вероятностью p появляется событие A, то вероятность $P_n(k)$

того, что событие A произойдёт в этих n опытах ровно k раз, выражается ***формулой Бернулли:***

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}\ (k=0,1,...,n),$$

где $q=1-p,\quad 0<p<1.$

Приведённая формула выражает так называемое *биномиальное распределение вероятностей.*

Примерами испытаний по схеме Бернулли могут служить многократные подбрасывания монеты, извлечения из урны шаров определенного цвета (с последующим их возвращением в урну), стрельба по мишени из одного и того же оружия и многое другое.

Вероятность хотя бы одного появления события A при n независимых опытах в одинаковых условиях равна

$$R_n(1)=1-q^n.$$

При большом числе независимых испытаний пользоваться формулой Бернулли затруднительно. В этом случае подсчёт можно производить по одной из следующих теорем.

Локальная теорема Лапласа. *Пусть в схеме независимых испытаний число испытаний n велико. Тогда вероятность наступления события A ровно k раз в n испытаниях определяется приближенной формулой:*

$$P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),\qquad где\ x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Значения функции $\varphi(x)$ указаны в таблице 1 приложения, причём $\varphi(-x)=\varphi(x)$ (функция чётная).

Интегральная теорема Лапласа. *Пусть в схеме независимых испытаний число испытаний n велико. Тогда вероятность наступления события A не менее k_1 раз и не более k_2 раз в n испытаниях определяется приближённой формулой:*

$$P_n(k_1;k_2)=\Phi(x'')-\Phi(x'),\qquad где\ x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}},\ x''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

Теорема Пуассона. *Пусть в схеме независимых испытаний число испытаний n велико и $0{,}1<np<10$. Тогда вероятность наступления события A ровно k раз в n испытаниях определяется приближённой формулой Пуассона:*

$$P_n(k)=\frac{a^k e^{-a}}{k!},\qquad где\ a=np,\ e\approx2{,}718.$$

Задача 5.1. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Какова вероятность того, что из 8 выстрелов 6 будут удачными?

Решение.

По формуле Бернулли

$$p_6=C_8^6\cdot0{,}8^6\cdot0{,}2^2=C_8^2\cdot0{,}8^6\cdot0{,}2^2=\frac{8\cdot7}{2}0{,}8^6\cdot0{,}2^2=0{,}29360128.$$

Вероятность не очень велика. Это объясняется большой вероятностью попадания при одном выстреле и, как следствие отсюда, малой вероятностью двух промахов. (Еще меньше вероятность 6 попаданий из 8, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,9: $C_8^6\cdot0{,}9^6\cdot0{,}1^2=0{,}14880348$).

Более естественно поставить задачу иначе: какова вероятность того, что из 8 выстрелов не менее 6 будут удачными? В этом случае нужно подсчитать сумму вероятностей попадания 6, 7 и 8 раз, т.е. $p_6 + p_7 + p_8$. По формуле Бернулли вычисляем

$$p_7 = C_8^7 \cdot 0{,}8^7 \cdot 0{,}2 = C_8^1 \cdot 0{,}8^7 \cdot 0{,}2 = 8 \cdot 0{,}8^7 \cdot 0{,}2 = 0{,}33554432,$$
$$p_8 = C_8^8 \cdot 0{,}8^8 = 0{,}8^8 = 0{,}16777216.$$

Сложив полученные вероятности, имеем:

$$p_6 + p_7 + p_8 = 0{,}29360128 + 0{,}33554432 + 0{,}16777216 = 0{,}79691776.$$

Задача 5.2. Прибор состоит из 10 узлов. Надёжность (вероятность безотказной работы в течение времени t) для каждого узла равна p. Узлы выходят из строя независимо один от другого. Найти вероятность того, что за время t:

а) откажет хотя бы один узел;
б) откажет ровно один узел;
в) откажут ровно два узла;
г) откажут не менее двух узлов.

Решение.

а) $P_{10}(1) = 1 - q^{10}$, где $q = 1 - p$;

б) $P_{10}(1) = C_{10}^1 p q^9 = 10 p q^9$;

в) $P_{10}(2) = C_{10}^2 p^2 q^8 = \dfrac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} p^2 q^8 = 45 p^2 q^8$;

г) $P_{10}(k \ge 2) = 1 - P_{10}(0) - P_{10}(1) = 1 - q^{10} - 10 p q^9 = 1 - q^9 (q + 10p)$.

Задача 5.3. Вероятность наступления события A в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что A наступит:

а) ровно 84 раза;
б) не менее 72 и не более 84 раз.

Решение.

а) По условию n=100; k=84; p=0,8; q=1–p=0,2. Так как n=100 достаточно большое число, воспользуемся локальной теоремой Лапласа:

$$P_{100}(84) = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} \cdot \varphi(x).$$

Найдём значение x:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{84 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{4}{4} = 1.$$

По таблице 1 приложения: $\varphi(1) = 0{,}24$.

Искомая вероятность:

$$P_{100}(84) = \frac{1}{4} \cdot 0{,}24 = 0{,}06.$$

б) По условию n=100; p=0,8; q=0,2; $k_1 = 72$; $k_2 = 84$.

Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P_{100}(72;84) = \Phi(x'') - \Phi(x').$$

Вычислим x' и x'':

$$x' = \frac{72 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{-8}{4} = -2;$$

$$x'' = \frac{84 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{4}{4} = 1;$$
$$P_{100}(72;84) = \Phi(1) - \Phi(-2).$$

По таблице 2 приложения находим $\Phi(1) = 0{,}34$, $\Phi(-2) = -\Phi(2) = -0{,}48$.

Искомая вероятность:

$$P_{100}(72;84) = 0{,}34 + 0{,}48 = 0{,}82.$$

Задача 5.4. Задачник издан тиражом 20000 экземпляров. Вероятность того, что он сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит три бракованные книги.

Решение.

По условию n=20000, p=0,0001, k=3. Поскольку n=20000 велико, а вероятность p=0,0001 мала, то воспользуемся теоремой Пуассона:

$$P_{20000}(3) = \frac{a^3 e^{-a}}{3!}.$$

Найдём a: $a = np = 20000 \cdot 0{,}0001 = 2$.

Искомая вероятность $\quad P_{20000}(3) = \dfrac{2^3 \cdot e^{-2}}{3!} = \dfrac{8}{6 \cdot e^2} = 0{,}18$.

Задача 5.5. Найти вероятность того, что событие A появится не менее трёх раз в четырёх независимых испытаниях, если вероятность появления события A в одном испытании равна 0,4.

Задача 5.6. Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 60 раз в 300 испытаниях, если появление этого события в каждом испытании равно 0,3.

Задача 5.7. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не менее 70 раз и не более 80 раз.

Задача 5.8. Вероятность изготовления автоматом бракованного изделия равна 0,01. Найти вероятность того, что в партии из 100 изделий ровно два окажутся бракованными.

§6. Случайные величины Законы распределения. Числовые характеристики случайных величин.

В повседневной жизни мы постоянно сталкиваемся с событиями, состоящими в появлении того или иного числа. Причем, предугадать заранее, какое именно число появится, не представляется возможным (т. к. это зависит от причин, не поддающихся учету). Например, при бросании игральной кости могут появиться числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Угадать количество очков, которое выпадет при очередном броске невозможно, т. к. оно зависит от множества причин: силы броска, скорости вращения кости, сопротивления воздуха, небольших неоднородностей кости и т.д. В этом смысле число выпавших очков есть *величина случайная*, а числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 – *возможные значения* этой случайной величины.

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, неизвестно заранее, какое именно.

Приведем еще несколько примеров случайных величин.

1. Число бракованных деталей в данной партии из ста штук может принимать любое целое неотрицательное значение от 0 до 100 (возможные значения величины). Это число также зависит от множества причин, не поддающихся учету (от того, кто изготовлял детали, от состояния станка, от качеств исходного материала и т. д.)

2. Дальность полета снаряда, выпущенного из данного орудия, при данном прицеле будет различной для разных выстрелов, а значит, также является случайной величиной. Действительно, эта величина зависит от многих причин, которые не могут быть полностью учтены: силы и направления ветра, температуры и влажности окружающей среды, индивидуальных особенностей снаряда и т. д. Возможные значения этой величины принадлежат некоторому интервалу (a; b).

3. Электрическая лампочка испытывается на длительность горения. Время горения – случайная величина, которая может принимать, вообще говоря, любое неотрицательное значение.

4. Автобус подходит к остановке через каждые 10 минут (интервал движения). Человек пришел на остановку. Время ожидания автобуса – случайная величина, которая может принимать любое значение из промежутка [0; 10).

5. Экзаменационный тест содержит 15 вопросов. Число верных ответов ученика – случайная величина, которая может принимать любое целое значение от 0 до 15.

6. Номер лотерейного билета, на который в данном тираже выпадет главный выигрыш.

7. Вес новорожденного, выраженный в граммах.

8. Число выстрелов, произведенных до первого попадания.

9. Расход электроэнергии данного предприятия за месяц (в кВт.).

10. Температура (атмосферное давление) в определенный момент времени.

Число подобных примеров можно продолжить, особенно если учесть, что даже в тех случаях, когда возможное событие носит качественный характер (мальчик или девочка, если речь идет о рождении ребенка; один из цветов спектра), его можно описать с помощью чисел (мальчик – 0, девочка – 1; длина волны, соответствующая данному цвету).

Несмотря на разнородность приведенных примеров, они все, с интересующей нас точки зрения, демонстрируют одно и то же. Во всех случаях мы имеем дело с величиной, так или иначе характеризующей результат испытания: каждая из этих величин может при различных испытаниях, какими бы однородными мы ни старались сделать их условия, принимать различные значения (в зависимости от не поддающихся учету случайных различий в обстановке этих испытаний).

Обычно случайные величины обозначают прописными буквами: X, Y, Z, … , а их возможные значения – соответствующими строчными буквами: x, y, z, …

Например, если случайная величина X имеет три возможных значения, то их обозначают x_1, x_2, x_3.

Дискретной случайной величиной называется случайная величина, принимающая отделённые друг от друга значения, которые можно перенумеровать.

В примерах 1, 5, 6, 8 случайные величины являются дискретными. В остальных примерах множество значений случайной величины заполняет некоторый промежуток.

Непрерывной случайной величиной называется случайная величина, возможные значения которой непрерывно заполняют какой-то промежуток.

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. Закон распределения может иметь разные формы.

1. Ряд распределения.

Рядом распределения дискретной случайной величины X называется таблица, где перечислены возможные значения этой случайной величины $x_1, x_2, ..., x_n$ с соответствующими им вероятностями $p_1, p_2, ..., p_n$.

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

;

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Графическое изображение ряда распределения (рис.4) называется **многоугольником распределения.**

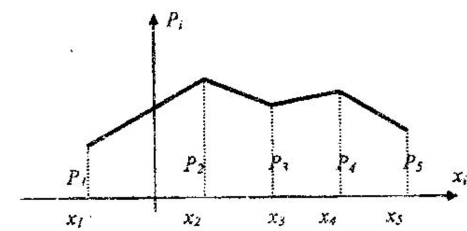


рис 4

2. Функция распределения.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, выражающая вероятность того, что X примет значение, меньшее чем x:

$$F(x) = P(X < x). \qquad (5)$$

Функцию $F(x)$ называют также *интегральным законом распределения* или *интегральной функцией распределения* случайной величины.

Функция $F(x)$ есть неубывающая функция, $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$.

Если X – случайная величина непрерывного типа, то функция распределения задаётся в виде непрерывной функции, например,

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg\, x \quad \text{или} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ \sin x, & \text{при } 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Если X – случайная величина дискретного типа, то её функция распределения записывается в виде:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x \le x_1\\ P_1, & \text{при } x_1 < x \le x_2\\ P_1+P_2, & \text{при } x_2 < x \le x_3\\ \dots\dots\dots\dots & \\ P_1+P_2+\dots+P_{n-1}, & \text{при } x_{n-1} < x \le x_n\\ 1, & \text{при } x > x_n\end{cases}.$$

График функции $F(x)$ в последнем случае – это ступенчатая неубывающая функция, имеющая скачки в точках x_i.

3. Плотность распределения

Плотностью распределения непрерывной случайной величины называется функция $f(x)=F'(x)$.

Свойства плотности вероятности

1. Плотность распределения любой случайной величины неотрицательна, т.е. $f(x)\ge 0$.

Это следует из того, что плотность вероятности является производной неубывающей функции $F(x)$.

2. $$p(a<x<b)=\int_a^b f(x)dx. \qquad (6)$$

Для доказательства формулы (6) достаточно вспомнить, что по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a),$$

а эта разность и есть вероятность попадания случайной величины в $[a;\ b]$, т.е. $p(a<x<b)$.

Если в равенстве (6) перейти к пределу при $a\to-\infty$, то получим

$$F(b)=p(x<b)=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx. \qquad (7)$$

Предел интеграла формулы (7) называют несобственным интегралом от функции $f(x)$ по промежутку $(-\infty;b)$ и обозначают символом $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$. Таким образом, установлено, что:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (8)$$

Формула (8), как и формула (5), устанавливает связь между функцией распределения вероятности и ее плотностью.

3. Переходя к пределу при $x\to+\infty$ в формуле (8), получим, с учетом того, что $F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty} F(x)=1$, равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1. \qquad (9)$$

(Интеграл, стоящий в формуле (9), также называют несобственным интегралом и по определению считают его равным пределу интеграла (8) при $x\to+\infty$).

Формула 9 означает, что площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и графиком плотности вероятности равна единице.

Можно доказать, что из условия (9) следует стремление $f(x)$ к нулю при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

Свойства 1 и 3 называют основными свойствами плотности вероятности. Объясняется это тем, что любая непрерывная функция $f(x)$, обладающая этими двумя свойствами, является плотностью распределения некоторой случайной величины X. Причем для нее можно построить функцию распределения $F(x)$. Поэтому можно определить случайную величину, задав ее плотность вероятности $f(x)$ (обладающую свойствами 1 и 3). А для нахождения функции распределения $F(x)$ можно воспользоваться формулой (8) или, вычислив неопределенный интеграл $\int f(x)dx$, найти значение произвольной постоянной, исходя из условия $F(-\infty)=0$.

График плотности $f(x)$ называется кривой распределения.

Элементом вероятности для случайной величины X называется величина $f(x)dx$, приближённо выражающая вероятность попадания случайной точки X в элементарный отрезок dx, примыкающий к точке x.

Функция распределения $F(x)$ выражается через плотность распределения формулой

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Вероятность попадания случайной величины X на участок от α до β (включая α) выражается формулой

$$P(\alpha\le X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha).$$

Если случайная величина X непрерывна, то $P(x=\alpha)=0$ и $P(\alpha<X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)$.

Вероятность попадания на участок от α до β для непрерывной случайной величины выражается формулой

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Закон распределения случайной величины дает исчерпывающую информацию о ней, так как позволяет вычислить вероятность любых событий, связанных с этой случайной величиной. Но эта информация зачастую трудно обозрима (если случайная величина принимает большое число значений, скажем большее 30). Кроме того, в ряде случаев совсем необязательно знание закона распределения случайной величины, а достаточно знать лишь некоторые основные ее характеристики, отражающие наиболее важные особенности этого закона. Одной из таких характеристик является «среднее» число, вокруг которого группируются значения случайной величины. Например, поступающий на работу интересуется средним заработком, на который он может рассчитывать. Рассмотрим некоторые из этих характеристик.

Математическим ожиданием случайной величины X называется её среднее значение, вычисляемое по формулам:

$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ – для дискретной случайной величины;

$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$ – для непрерывной случайной величины.

В случае, когда $M(X)$ надо обозначить одной буквой, будем писать $M(X)=m_x$.

Отметим, что математическое ожидание случайной величины не является случайной величиной. Это некоторая константа, характеризующая данную случайную величину.

Математическое ожидание $M(X)$ случайной величины всегда расположено между ее наименьшим и наибольшим значениями. В самом деле: пусть b и c – наибольшее и наименьшее значения величины X, т. е. для всех ее значений выполняется неравенство $b \le x_k \le c$. Тогда

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+...+x_mp_m \le c\sum_{k=1}^{m} p_k = c,$$

т.к. $\sum_{k=1}^{m} p_k = 1$. Аналогично проверяется неравенство $M(X) \ge b$.

Обратим внимание на механическую интерпретацию математического ожидания случайной величины. Пусть в n точках $x_1, x_2, ..., x_n$ сосредоточены массы $p_1, p_2, ..., p_n$. Тогда центр масс этой системы находится в точке

$$x_c = \frac{x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n}{p_1+p_2+...+p_n}.$$

Если сумма масс равна единице: $p_1+p_2+...+p_n=1$, то $x_c = x_1p_1+x_2p_2+...+x_mp_m = M(X)$ – математическому ожиданию. Поэтому математическое ожидание случайной величины называют *центром распределения*.

Происхождение термина «математическое ожидание» связано с периодом возникновения теории вероятностей, когда область ее применения ограничивалась азартными играми. Игрока интересовало среднее значение ожидаемого выигрыша, иными словами математическое ожидание выигрыша.

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:

$$M(C)=C. \qquad (10)$$

Действительно, постоянную величину можно рассматривать как величину, принимающую одно значение C с вероятностью 1. Поэтому $M(C)=C\cdot 1=C$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX)=C\cdot M(X). \qquad (11)$$

Это следует из равенства

$$M(CX)=\sum_{k=1}^{n}(Cx_k)p_k = C\sum_{k=1}^{n} x_kp_k = CM(X).$$

3. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y). \qquad (12)$$

Это утверждение примем без доказательства.

Следствие. Математическое ожидание разности случайных величин равно разности их математических ожиданий:

$$M(X-Y)=M(X)-M(Y). \qquad (13)$$

Действительно,

$$M(X-Y)=M(X+(-1)Y)=M(X)+(-1)M(Y)=M(X)-M(Y).$$

Прежде чем формулировать следующее свойство, дадим определение.

Две случайные величины называются **независимыми**, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какие значения приняла вторая случайная величина.

Иными словами, случайные величины X и Y независимы, если независимы события $X=x_k$ и $Y=y_j$ при любых k и j. В этом случае при любых k и j:

$$p((X=x_k)\cdot(Y=y_j)) = p(X=x_k)\cdot p(Y=y_j). \qquad (14)$$

4. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y). \qquad (15)$$

Для доказательства обозначим $p(X=x_k)=p_k$, а $p(Y=y_j)=d_j$. Тогда из (14) следует, что

$$p((X=x_k)\cdot(Y=y_j)) = p_k\cdot d_j$$

и

$$M(X\cdot Y)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_ky_jp_kd_j = \sum_{k=1}^{n} x_kp_k\cdot\sum_{j=1}^{m} y_jd_j = M(X)\cdot M(Y).$$

5. Математическое ожидание отклонения случайной величины от ее математического ожидания равно нулю:

Обозначим $M(X)=m$. Тогда

$$M[X-M(X)] = M(X-m) = M(X)-M(m) = m-m=0.$$

Математическое ожидание является важной характеристикой случайной величины. Это центр, вокруг которого группируются ее значения. Однако при решении многих вопросов эта характеристика оказывается недостаточной, т.к. она не отражает степень рассеяния (разброса, отклонения) значений случайной величины от ее математического ожидания. Например, есть две случайные величины X и Y, законы распределения которых:

x_i	–100	–80	0	80	100
p_i	0,4	0,1	0	0,1	0,4
y_i	–1	–0,2	0	0,1	0,5
p_i	0,1	0,2	0,1	0,4	0,2

Они имеют одно и то же математическое ожидание, равное нулю. Но разброс значений X от нуля во много раз больше чем разброс Y.

Вопрос о степени отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания возникает при решении многих практических задач. Например, в артиллерии важно знать, насколько кучно лягут снаряды вблизи цели, которая должна быть поражена. Точно так же для оценки качества того или иного сорта пшеницы, конечно, важно знать его среднюю урожайность. Урожай есть случайная величина, зависящая от многих условий: количества осадков, количества и качества удобрений, солнечной радиации, температуры и т. д. И более ценным является такой сорт пшеницы, урожайность которого меньше зависит от метеорологических и других факторов, т. е. такой, для которого отклонения случайной величины (в данном случае урожайности) от среднего ее значения меньше.

Аналогично для характеристики погодных условий региона недостаточно знания среднегодовой нормы осадков, а для характеристики качества работы измерительного прибора важно знать, насколько сильно его показания могут уклоняться от истинного значения измеряемой величины (при этом неутешительно, если известно, что среднее отклонение равно нулю). Подобных примеров можно привести достаточно много.

Полную характеристику отклонений случайной величины X от ее математического ожидания дает разность $X - M(X)$. Но это снова случайная величина (ее значения $x_k - M(X)$, а соответствующие вероятности p_k), а значит, не очень удобна для оценки рассеяния. Ничего не дает и математическое ожидание этой разности $M[X - M(X)]$, которое равно нулю для любой случайной величины X. То, что эта величина равна нулю, вполне понятно: математическое ожидание $M(X)$ потому и является центром, что отклонения в одну сторону (положительные) уравновешиваются отклонениями в другую (отрицательными). Поэтому естественно рассмотреть математическое ожидание абсолютной величины разности $|X - M(X)|$: $M(|X - M(X)|)$ или другую сходную с ней характеристику $M([X - M(X)]^2)$.

Так как оперировать с абсолютной величиной несколько сложнее, то предпочтительней рассматривать квадрат отклонения случайной величины от ее математического ожидания. Эту числовую характеристику степени рассеяния случайной величины называют дисперсией (латинское слово дисперсия означает «рассеяние»).

Дисперсией $D(X)$ случайной величины X называют математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания $M(X)$:

$$D(X) = M([X - M(X)]^2) \qquad (16)$$

или $D(X) = M((X - m_x)^2)$, где $m_x = M(X)$ (математическое ожидание квадрата разности между случайной величиной X и её математическим ожиданием).

Дисперсия вычисляется по формулам:

$D(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^2 p_i$ – для дискретной случайной величины;

$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - m_x)^2 f(x)\,dx$ – для непрерывной случайной величины.

Дисперсию $D(x)$ кратко будем обозначать D_x.

Дисперсия $D(X)$ имеет размерность квадрата случайной величины, что не всегда удобно. Поэтому в качестве характеристики рассеяния иногда бывает удобнее использовать другую величину σ_x, называемую средним квадратическим (стандартным) отклонением случайной величины X.

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется корень квадратный из дисперсии

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}.$$

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$D(C) = 0.$$

Действительно, $D(C) = M([C - M(C)]^2) = M(C - C)^2 = M(0) = 0$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

$$D(C \cdot X) = C^2 D(X).$$

Докажите это свойство самостоятельно.

3. Дисперсия случайной величины равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \qquad (17)$$

Обозначим $M(X) = m$. Тогда

$$D(X) = M([X - M(X)]^2) = M[(X - m)^2] =$$
$$M(X^2 - 2Xm + m^2) = M(X^2) - 2mM(X) + m^2 = M(X^2) - 2m^2 + m^2 = M(X^2) - m^2.$$

Свойство доказано.

Для вычисления дисперсии формула (17) удобнее, чем формула (16) и ею, как правило, пользуются на практике.

4. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Обозначим $M(X) = m_x$, $M(Y) = m_y$ и воспользуемся формулой (17):

$$D(X + Y) = M[(X + Y)^2] - M(X + Y)]^2 =$$
$$= M(X^2 + 2XY + Y^2) - [M(X) + M(Y)]^2 =$$
$$= M(X^2) + 2m_x m_y + M(Y^2) - (m_x)^2 - 2m_x m_y - (m_y)^2 =$$
$$= [M(X^2) - (m_x)^2] + [M(Y^2) - (m_y)^2] = D(X) + D(Y).$$

Из свойств 2 и 4 следует, что $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$. Обратите внимание на то, что дисперсия разности равна *сумме* (а не разности!) дисперсий.

<u>**Задача 6.1.**</u> Может ли при каком-либо значении аргумента быть:

1) функция распределения больше единицы?
2) плотность распределения больше единицы?
3) функция распределения отрицательной?
4) плотность распределения отрицательной?

<u>**Задача 6.2.**</u> Какова размерность: 1) математического ожидания, 2) дисперсии, 3) среднего квадратического отклонения?

<u>**Задача 6.3.**</u> По мишени стреляют один раз с вероятностью попадания 0,8. Случайная величина X – число попаданий. Очевидно, что множество ее значений: 0 и 1. Закон распределения:

x_i	0	1
p_i	0,2	0,8

<u>**Задача 6.4.**</u> В денежной лотерее выпущено 1000 билетов. Разыгрывается 1 выигрыш в 1000 руб., 3 – по 500 руб., 10 – по 100 руб. и 50 – по 25 руб. Найти закон распределения случайной величины X – стоимости выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

Решение.

Возможные значения X: $x_1 = 1000$, $x_2 = 500$, $x_3 = 100$, $x_4 = 25$, $x_5 = 0$. Их вероятности: $p_1 = 0{,}001$, $p_2 = 0{,}003$, $p_3 = 0{,}01$, $p_4 = 0{,}5$, $p_5 = 0{,}936$ (число билетов без выигрыша равно: $1000 - 1 - 3 - 10 - 50 = 936$). Искомый закон распределения можно записать в виде таблицы:

x_i	1000	500	100	25	0
p_i	0,001	0,003	0,01	0,05	0,936

Сумма вероятностей $0{,}001 + 0{,}003 + 0{,}01 + 0{,}05 + 0{,}936 = 1$.

Задача 6.5. Вероятности того, что ученик сдаст экзамены по математике, физике, химии равны, соответственно 0,9; 0,8; 0,8. Составить закон распределения случайной величины X – числа сданных учеником экзаменов.

Решение.

Случайная величина X может принимать значения 0, 1, 2, 3. Обозначим для краткости через $A_м$, $A_ф$ и $A_х$ события, состоящие в том, что ученик сдаст экзамен, соответственно, по математике, физике, химии. Тогда, считая эти события независимыми, получим:

$$p(X=0) = p(\overline{A_м}, \overline{A_ф}, \overline{A_х}) = p(\overline{A_м})p(\overline{A_ф})p(\overline{A_х}) =$$
$$= 0{,}1\cdot0{,}2\cdot0{,}2 = 0{,}004;$$
$$p(X=1) = p(A_м, \overline{A_ф}, \overline{A_х}) + p(\overline{A_м}, A_ф, \overline{A_х}) + p(\overline{A_м}, \overline{A_ф}, A_х) =$$
$$= p(A_м)p(\overline{A_ф})p(\overline{A_х}) + p(\overline{A_м})p(A_ф)p(\overline{A_х}) + p(\overline{A_м})p(\overline{A_ф})p(A_х) =$$
$$= 0{,}9\cdot0{,}2\cdot0{,}2 + 0{,}1\cdot0{,}8\cdot0{,}2 + 0{,}2\cdot0{,}2\cdot0{,}8 = 0{,}036 + 0{,}016 + 0{,}016 = 0{,}068;$$
$$p(X=2) = p(A_м, A_ф, \overline{A_х}) + p(A_м, \overline{A_ф}, A_х) + p(\overline{A_м}, A_ф, A_х) =$$
$$= 0{,}9\cdot0{,}8\cdot0{,}2 + 0{,}9\cdot0{,}2\cdot0{,}8 + 0{,}1\cdot0{,}8\cdot0{,}8 = 0{,}352;$$
$$p(X=3) = p(A_м, A_ф, A_х) = 0{,}9\cdot0{,}8\cdot0{,}8 = 0{,}576.$$

Сумма вероятностей

$$0{,}004 + 0{,}068 + 0{,}352 + 0{,}576 = 1.$$

Закон распределения:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,004	0,68	0,352	0,576

Задача 6.6. Производится стрельба по некоторой цели до первого попадания, без ограничения числа выстрелов. Вероятность попадания при каждом выстреле равна p. Случайная величина X – число выстрелов до первого попадания.

Решение.

Множеством значений данной случайной величины является множество натуральных чисел. Очевидно, что $p(X=1) = p$, $p(X=2) = (1-p)p$, $p(X=3) = (1-p)^2p$. И вообще для любого n: $p(X=n) = (1-p)^{n-1}p$, где $(n-1)$ – промах и попадание при n-ном выстреле. Закон распределения данной случайной величины:

x_i	1	2	3	...	n
p_i	p	$(1-p)p$	$(1-p)^2p$	...	$(1-p)^{n-1}p$

Сумма вероятностей всех значений X равна сумме членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$p + (1-p)p + (1-p)^2p + \ldots + (1-p)^{n-1}p + \ldots = \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$$

Задача 6.7. Найти математическое ожидание суммы числа очков, которая может выпасть при бросании двух игральных костей.

Решение.

Обозначим число очков, которое может выпасть на первой и второй костях, через X и Y соответственно. Ясно, что возможные значения этих случайных величин 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Вероятность каждого из этих значений равна $\frac{1}{6}$ (для каждой кости). Математическое ожидание $M(X) = (1+2+3+4+5+6)\cdot\frac{1}{6} = \frac{7}{2}$. Ясно, что и $M(Y) = \frac{7}{2}$. Поэтому $M(X+Y) = M(X) + M(Y) = 7$. Итак, математическое ожидание суммы числа очков равно 7.

Задача 6.8. Монета брошена три раза. Случайная величина X – число выпадений герба. Требуется найти функцию распределения X.

Решение.

Используя формулу Бернулли, находим вероятности выпадения герба 0, 1, 2, 3 раза: $p_3(k) = C_3^k\cdot(0{,}5)^3$ (вероятность выпадения герба $p = 0{,}5$ и $q = 1 - p = 0{,}5$). Закон распределения вероятностей:

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Будем задавать различные значения x и находить для них $F(x) = p(X < x)$:

если $x \le 0$, то $F(x) = 0$ (в том числе и при $x = 0$

$$F(0) = p(X < 0) = 0);$$

если $0 < x \le 1$, то $F(x) = \frac{1}{8}$;

если $1 < x \le 2$, то $F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$;

если $2 < x \le 3$, то $F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$.

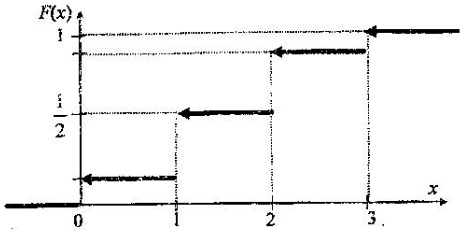
Наконец,

если $x > 3$, то $F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$.

Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } & x\le 0\\ \frac{1}{8}, \text{ при } & 0<x\le 1\\ \frac{1}{2}, \text{ при } & 1<x\le 2\\ \frac{7}{8}, \text{ при } & 2<x\le 3\\ 1, \text{ при } & 3>x\end{cases}.$$

График функции распределения изображен на рисунке.



Функция распределения является кусочно-постоянной (ступенчатой), имеющей разрывы в точках 0, 1, 2, 3. Пределы функции в точках разрыва слева и справа различны. Такие точки разрыва называются точками разрыва с конечным скачком. Скачок функции (разность между пределом справа и пределом слева) в точке n равен вероятности этого значения (значения n = 0, 1, 2, 3). Сумма всех скачков функции равна 1. Отмеченные особенности характерны для функций распределения дискретных случайных величин.

Задача 6.9. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x_i	-5	2	3	4
p_i	0,4	0,3	0,1	0,2

Найти: 1) математическое ожидание, 2) дисперсию, 3) среднее квадратическое отклонение, 4) функцию распределения $F(x)$, 5) построить график $F(x)$.

Решение.

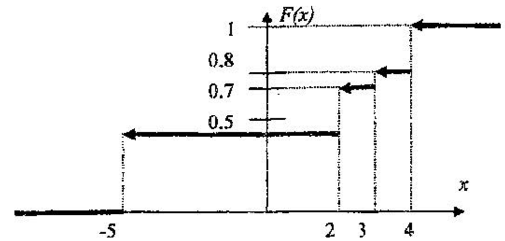
1) $M(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i p_i=(-5)\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}3+3\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}2=-0{,}3$.

2) $D(X)=\sum_{i=1}^{4}(x_i-m_x)^2 p_i=(-5+0{,}3)^2\cdot 0{,}4+(2+0{,}3)^2\cdot 0{,}3+$
$+(3+0{,}3)^2\cdot 0{,}1+(4+0{,}3)^2\cdot 0{,}2=15{,}21.$

3) $\sigma_x=\sqrt{D_x}=\sqrt{15{,}21}=3{,}9$.

4) $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le -5\\ 0{,}4, & \text{при } -5<x\le 2\\ 0{,}4+0{,}3=0{,}7, & \text{при } 2<x\le 3\\ 0{,}7+0{,}1=0{,}8, & \text{при } 3<x\le 4\\ 1, & \text{при } x>4\end{cases}.$$

5)



Задача 6.10. В одном ящике 4 синих и 12 красных шаров, в другом – 6 синих и 8 красных шаров. Из каждого ящика наугад взяли по одному шару. Рассматривается случайная величина X – число красных шаров среди вынутых двух шаров. Найти:

1) ряд распределения случайной величины X;
2) математическое ожидание $M(x)$;
3) дисперсию $D(x)$;
4) среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)$;
5) функцию распределения $F(x)$;
6) построить график $F(x)$.

Решение.

1) Случайная величина X может принимать следующие возможные значения:

$x_1=0$ – ни одного красного шара $(c\cdot c)$,

$x_2=1$ – один красный шар $(k\cdot c+c\cdot k)$,

$x_3=2$ – оба шара красные $(k\cdot k)$.

Находим вероятности, с которыми принимаются эти значения, используя теоремы умножения и сложения вероятностей.

$p_1=\frac{4}{16}\cdot\frac{6}{14}=\frac{3}{28}\approx 0{,}11,$

$p_2=\frac{12}{16}\cdot\frac{6}{14}+\frac{4}{16}\cdot\frac{8}{14}=\frac{13}{28}\approx 0{,}46,$

$p_3=\frac{12}{16}\cdot\frac{8}{14}=\frac{12}{28}\approx 0{,}43.$

Ряд распределения имеет вид:

x_i	0	1	2
p_i	$3/28$	$13/28$	$12/28$

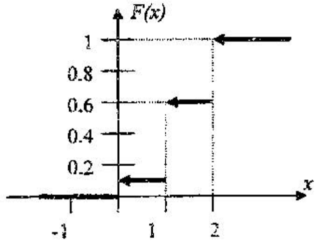
Проверка: $\sum_{i=1}^{3}p_i=\frac{3}{28}+\frac{13}{28}+\frac{12}{28}=1$.

2) $M(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i p_i=0\cdot\frac{3}{28}+1\cdot\frac{13}{28}+2\cdot\frac{12}{28}=\frac{37}{28}\approx 1{,}32.$

3) $D(X)=\sum_{i=1}^{3}(x_i-m_x)^2 p_i=(0-1{,}32)^2\cdot\frac{3}{28}+(1-1{,}32)^2\cdot\frac{13}{28}+(2-1{,}32)^2\cdot\frac{12}{28}\approx 0{,}43.$

4) $\sigma_x=\sqrt{D_x}=\sqrt{0{,}43}\approx 0{,}66$.

5) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le 0 \\ \dfrac{3}{28}, & \text{при } 0<x\le 1 \\ \dfrac{3}{28}+\dfrac{13}{28}=\dfrac{16}{28}, & \text{при } 1<x\le 2 \\ 1, & \text{при } x>2 \end{cases}$



Задача 6.11. В урне 5 шаров: 3 белых и 2 чёрных. Наудачу вынимают 3 шара. Рассматривается случайная величина X – число извлечённых белых шаров. Найти:

1) закон распределения случайной величины X;
2) функцию распределения $F(x)$ и её график;
3) математическое ожидание $M(x)$;
4) дисперсию $D(x)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)$.

Решение.

1) Случайная величина X может принимать следую-щие возможные значения:

$x_1=1$ – один белый шар среди трёх шаров;

$x_2=2$ – два белых шара среди трёх шаров;

$x_3=3$ – все три шара белые.

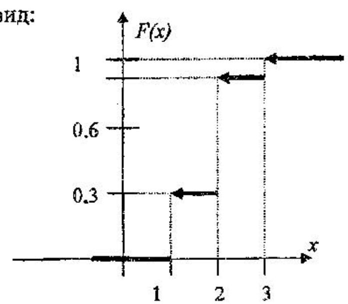
Находим вероятности, с которыми принимаются эти значения, используя классическую формулу вероятности ($P=\dfrac{m}{n}$):

$P_1=\dfrac{C_3^1\cdot C_2^2}{C_5^3}=\dfrac{3}{10};\quad P_2=\dfrac{C_3^2\cdot C_2^1}{C_5^3}=\dfrac{6}{10};\quad P_1=\dfrac{1}{C_5^3}=\dfrac{1}{10}.$

Закон распределения имеет вид:

x_i	1	2	3
p_i	0,3	0,6	0,1

$\sum_{i=1}^{3} p_i = 0{,}3+0{,}6+0{,}1=1.$



1) Исходя из закона распределения случайной величины X, запишем функцию распределения $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le 1 \\ 0{,}3, & \text{при } 1<x\le 2 \\ 0{,}3+0{,}6=0{,}9, & \text{при } 2<x\le 3 \\ 1, & \text{при } x>3 \end{cases}.$$

2) $M(X)=1\cdot 0{,}3+2\cdot 0{,}6+3\cdot 0{,}1=1{,}8;$

3) $D(X)=(1-1{,}8)^2\cdot 0{,}3+(2-1{,}8)^2\cdot 0{,}6+(3-1{,}8)^2\cdot 0{,}1=0{,}36;\quad \sigma_x=\sqrt{D_x}=\sqrt{0{,}36}=0{,}6.$

Задача 6.12. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le 0 \\ a(1-\cos x), & \text{при } 0<x\le \pi \\ 1, & \text{при } x\ge \pi \end{cases}.$$

Найти:

1) неизвестный параметр a и $f(x)$;
2) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$;
3) вероятность попадания случайной величины в интервал $(0;\pi/4)$;
4) математическое ожидание $M(x)$, дисперсию $D(x)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)$.

Решение.

1) Для нахождения неизвестного параметра a воспользуемся свойством:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1.$$

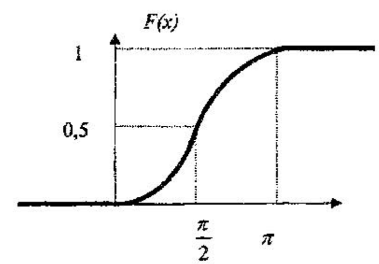
Функция плотности вероятности $f(x)=F'(x)$:

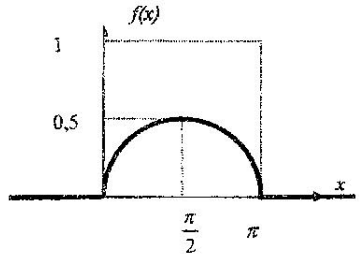
$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le 0 \\ a\sin x, & \text{при } 0<x\le \pi; \\ 0, & \text{при } x>\pi \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_0^{\pi} a\sin x dx+\int_{\pi}^{+\infty} 0dx=1;\qquad a\int_0^{\pi}\sin x dx=1 \Rightarrow a=\frac{1}{-\cos x\big|_0^{\pi}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le 0 \\ \dfrac{1}{2}(1-\cos x), & \text{при } 0<x\le\pi \\ 1, & \text{при } x>\pi \end{cases};\ f(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le 0 \\ \dfrac{1}{2}\sin x, & \text{при } 0<x\le\pi \\ 0, & \text{при } x>\pi \end{cases}.$

2)





3) $P(0<X<\frac{\pi}{4})=F(\frac{\pi}{4})-F(0)=$

$=\frac{1}{2}(1-\cos\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2}(1-\cos 0)=\frac{2-\sqrt{2}}{4}\approx 0{,}146$

или $P(0<X<\frac{\pi}{4})=\int\limits_0^{\pi/4} f(x)dx=\int\limits_0^{\pi/4}\frac{1}{2}\sin x dx=-\frac{1}{2}\cos x\Big|_0^{\pi/4}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}\approx 0{,}146.$

4) $M(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} x\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}\approx 1{,}57$.

Примечание: интеграл берётся по частям.

$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)^2 f(x)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}(x-\frac{\pi}{2})^2\sin x\,dx=\frac{\pi^2-8}{2}\approx 0{,}93.$

Примечание: интеграл берётся дважды по частям $\sigma(x)=\sqrt{D(x)}=\sqrt{0{,}93}=0{,}96$.

Задача 6.13. Непрерывная случайная величина X задана функцией плотности вероятностей в виде:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0\\ \frac{1}{2}x, & \text{при } 0<x\le 2.\\ 0, & \text{при } x>2\end{cases}$$

Найти:
1) функцию распределения $F(x)$;
2) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;
3) $P(1\le x<2)$;
4) $M(x)$, $D(x)$, $\sigma(x)$.

Решение.

1) $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$;

Найдём выражения функции распределения $F(x)$ на различных участках:

если $-\infty<x\le 0$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} 0dt=0$;

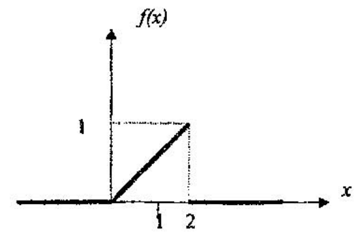
если $0<x\le 2$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dt+\int\limits_0^{x}\frac{1}{2}tdt=\frac{x^2}{4}$;

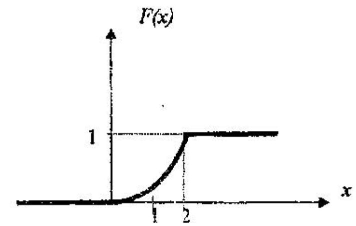
если $x>2$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dt+\int\limits_0^{2}\frac{1}{2}tdt+\int\limits_2^{x} 0dt=1.$

Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0\\ \frac{x^2}{4}, & \text{при } 0<x\le 2.\\ 1, & \text{при } x>2\end{cases}$$

2)





3) $P(1\le X<2)=F(2)-F(1)=\frac{2^2}{4}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$;

4) $M(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} x\cdot 0dx+\int\limits_0^{2} x\cdot\frac{1}{2}xdx++\int\limits_2^{+\infty} x\cdot 0dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2} x^2dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{4}{3}$;

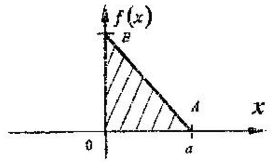
$D(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)^2 f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0}(x-\frac{4}{3})^2\cdot xdx=\int\limits_0^{2}(x^3-\frac{8}{3}x^2+\frac{16}{9}x)dx=$

$=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{8}{9}x^3+\frac{8}{9}x^2\right)\Big|_0^2=\frac{2}{9}\approx 0{,}22$;

$\sigma(x)=\sqrt{\frac{2}{9}}=0{,}47$.

Задача 6.14. Случайная величина X распределена по “закону прямоугольного треугольника” в интервале $(0;\,a)$:
1) написать выражение плотности распределения;
2) найти функцию распределения $F(x)$;
3) найти вероятность попадания случайной величины X на участок от $\frac{a}{2}$ до a;
4) найти $M(x)$, $D(x)$, $\sigma(x)$.

Решение.



1) Воспользуемся свойством функции плотности $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, которое в данном случае означает равенство единице площади треугольника OAB.

В результате получим:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x<0 \\ \dfrac{2}{a}\left(1-\dfrac{x}{a}\right), & \text{при } 0<x<a; \\ 0, & \text{при } x>a \end{cases}$$

2) $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$:

на участке $(-\infty;0)$: $F(x)=0$,

на участке $(0;a)$: $F(x)=\int\limits_0^x \frac{2}{a}\left(1-\frac{t}{a}\right)dt=\frac{2}{a}\left(t\Big|_0^x-\frac{1}{2a}t^2\Big|_0^x\right)=\frac{x}{a}\left(2-\frac{x}{a}\right)$;

на участке $(a;+\infty)$: $F(x)=\int\limits_0^a \frac{2}{a}\left(1-\frac{t}{a}\right)dt=\frac{2}{a}\left(t\Big|_0^a-\frac{1}{2a}t^2\Big|_0^a\right)=1$.

Таким образом, $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le 0 \\ \dfrac{x}{a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right), & \text{при } 0<x\le a. \\ 1, & \text{при } x>a \end{cases}$

3) $P\left(\frac{a}{2}\le X<a\right)=F(a)-F\left(\frac{a}{2}\right)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$.

4) $M(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{2}{a}\int\limits_0^a x\left(1-\frac{x}{a}\right)dx=\frac{2}{a}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^a=\frac{a}{3}$,

$D(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)^2 f(x)dx=\frac{2}{a}\int\limits_0^a\left(x-\frac{a}{3}\right)^2\left(1-\frac{x}{a}\right)dx=\frac{2}{9a}\int\limits_0^a(3x-a)^2(a-x)dx=$

$=\frac{2}{9a}\int\limits_0^a(15ax^2-7a^2x-9x^3+a^3)dx=\frac{a^2}{18}$, $\qquad \sigma(x)=\sqrt{D(x)}=\sqrt{\frac{a^2}{18}}=\frac{a}{3\sqrt{2}}$.

Задача 6.15. В партии из 6 деталей имеется 4 стандартных. Наудачу отобраны 3 детали.

1) Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных;
2) Найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график;
3) Вычислить $M(x)$, $D(x)$, $\sigma(x)$.

Задача 6.16. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le 1 \\ \dfrac{1}{2}\left(x^2-x\right), & \text{при } 1<x\le 2. \\ 1, & \text{при } x>2 \end{cases}$$

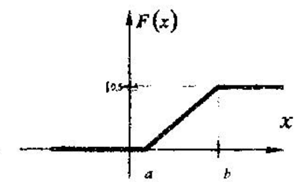
Найти: 1) функцию плотности $f(x)$, построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$; 2) $P\left(\frac{4}{3}\le x<\frac{5}{3}\right)$; 3) $M(x)$, $D(x)$.

Задача 6.17. Плотность распределения случайной величины X задана функцией:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le -1 \\ ax^2, & \text{при } -1<x\le 1. \\ 0, & \text{при } x>1 \end{cases}$$

Найти: 1) параметр a; 2) функцию распределения $F(x)$; 3) $M(x)$, $D(x)$.

Задача 6.18. Функция распределения случайной величины X задана графиком. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.



§7. Некоторые типичные законы распределения случайных величин

1. Биномиальный закон распределения

Дискретная случайная величина X называется *распределённой по биномиальному закону*, если её возможные значения: 0, 1, 2, …, n, а вероятность того, что X k, выражается формулой

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad \text{где } 0<p<1,\ q=1-p.$$

Математическое ожидание: $M(x)=np$.

Дисперсия $D(x)=npq$.

Распределение называют биномиальным из-за того, что вероятности $P_n(k)$ по форме представляет собой члены разложения бинома $(p+q)^k$.

Задача 7.1. Производятся три независимых опыта, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью 0,4. Рассматривается случайная величина X – число появлений события A в трёх опытах. Построить ряд распределения и функцию распределения случайной величины X. Найти её математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

Решение.

Случайная величина X – дискретная и имеет возможные значения: 0, 1, 2, 3. Вероятности этих возможных значений определяются по формуле Бернулли.

$p = 0{,}4$; $q = 1 - q = 0{,}6$; $n = 3$;

$P(x=0) = q^3 = 0{,}6^3 = 0{,}216$;

$P(x=1) = C_3^1 pq^2 = 3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}432$;

$P(x=2) = C_3^2 p^2 q = 3 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}288$;

$P(x=3) = p^3 = 0{,}4^3 = 0{,}064$.

Ряд распределения имеет вид:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

Находим функцию распределения:

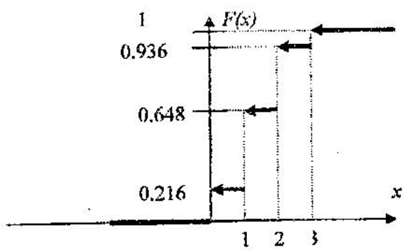
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ 0{,}216, & \text{при } 0 < x \le 1 \\ 0{,}216 + 0{,}432 = 0{,}648, & \text{при } 1 < x \le 2 \\ 0{,}648 + 0{,}288 = 0{,}936, & \text{при } 2 < x \le 3 \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

Построим график функции $F(x)$ (см. рис. ниже).

Найдём числовые характеристики:

$M(x) = np = 3 \cdot 0{,}4 = 1{,}2$;

$D(x) = npq = 3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}72$;



$\sigma(x) = \sqrt{0{,}72} = 0{,}85$.

Задача 7.2. Монета подбрасывается 6 раз. Рассматривается случайная величина X – число выпавших гербов. Построить ряд распределения этой случайной величины и найти её характеристики: $M(x)$, $D(x)$, $\sigma(x)$.

2. Закон Пуассона

Дискретная случайная величина X называется *распределённой по закону Пуассона*, если её возможные значения: 0, 1, 2, …, k, …, а вероятность того, что $X = k$, выражается формулой

$$P(X = k) = P_k = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad \text{где } a > 0 \text{ – параметр закона Пуассона.}$$

Распределение Пуассона возникает там, где какие-то точки (или другие элементы) занимают случайное положение независимо друг от друга, и посчитывают количество этих точек, попавших в какую-то область.

Математическое ожидание: $M(x) = a$. Дисперсия: $D(x) = a$.

Потоком событий называется последовательность событий, наступающих одно за другим в случайные моменты времени.

Плотностью потока $\lambda(t)$ называется среднее число событий в единицу времени.

Если $\lambda(t) = const$, то пуассоновский поток называется *простейшим*. Для простейшего потока число событий, попадающих на любой участок длины τ, распределено по закону Пуассона с параметром $a = \lambda\tau$.

Ряд распределения случайной величины X имеет вид:

x_i	0	1	2	…	k	…
p_k	e^{-a}	$\frac{a}{1!}e^{-a}$	$\frac{a^2}{2!}e^{-a}$	…	$\frac{a^k}{k!}e^{-a}$	…

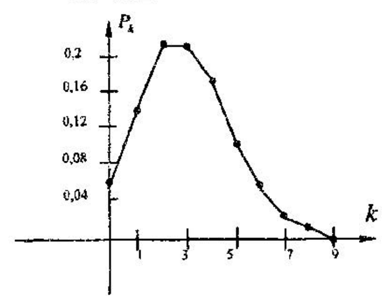
Задача 7.3. Случайная величина X подчинена закону Пуассона с математическим ожиданием $a = 3$. Построить ряд распределения и многоугольник распределения. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем её математическое ожидание.

Решение.

Ряд распределения случайной величины X имеет вид:

x_k	0	1	2	3
p_k	$e^{-3} \approx$ 0,05	$3e^{-3} \approx$ 0,15	$4{,}5e^{-3} \approx$ 0,225	$4{,}5e^{-3} \approx$ 0,225

x_k	4	5	6	7	8
p_k	$\frac{27}{8}e^{-3} \approx$ 0,17	$\frac{81}{40}e^{-3} \approx$ 0,10	$\frac{81}{40}e^{-3} \approx$ 0,05	$\frac{243}{560}e^{-3} \approx$ 0,02	$\frac{729}{4480}e^{-3} \approx$ 0,01



$P(X < 3) = P_0 + P_1 + P_2 = 0{,}05 + 0{,}15 + 0{,}225 = 0{,}425$.

Задача 7.4. При работе электронно-вычислительной машины время от времени возникают неисправности (сбои). Поток сбоев можно считать простейшим. Среднее число сбоев за сутки равно 1,5. Найти вероятности следующих событий:

A – за двое суток не будет ни одного сбоя;

B – в течение суток произойдёт хотя бы один сбой;

C – за неделю работы машины произойдёт не менее трёх сбоев.

Решение.

$a_1 = 1{,}5$ – среднее число сбоев за сутки.

1) Среднее число сбоев за двое суток:

$a_2 = 2\cdot 1{,}5 = 3$; $k = 0$; $P(A) = e^{-3} \approx 0{,}05$;

2) $a_1 = 1{,}5$; $k \ge 1$;

$P(B) = 1 - e^{-a_1} = 1 - a^{-1{,}5} = 1 - 0{,}223 = 0{,}777$;

3) $a_3 = 1{,}5\cdot 7 = 10{,}5$; $k_0 = 0$; $k_1 = 1$; $k_2 = 2$; $P_0 = e^{-10{,}5}$; $P_1 = 10{,}5\cdot e^{-10{,}5}$; $P_2 = \frac{10{,}5^2}{2}\cdot e^{-10{,}5}$;

$P(C) = 1 - (P_0 + P_1 + P_2) = 1 - 66{,}625\cdot e^{-10{,}5} = 1 - 0{,}002 = 0{,}998.$

Задача 7.5. Поток заявок, поступающих на телефонную станцию, представляет собой простейший поток. Математическое ожидание числа вызовов за один час равно 30. Найти вероятность того, что за одну минуту поступит не менее двух вызовов.

3. Показательный закон распределения

Непрерывная случайная величина X имеет *показательное распределение*, если её плотность имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x \ge 0 \end{cases},$$

где $\lambda > 0$ – параметр показательного закона.

Примером непрерывной случайной величины, распределённой по показательному закону, может служить время между появлениями двух последовательных событий простейшего потока.

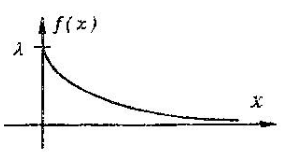
Математическое ожидание $M(x) = \frac{1}{\lambda}$. Дисперсия $D(x) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Задача 7.6. Случайная величина X подчинена показательному закону с параметром λ,

а) построить кривую распределения; б) найти функцию распределения $F(x)$; в) найти вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее её математического ожидания.

Решение

а)



б) при $x > 0$ $F(x)\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt = -e^{-\lambda t}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$.

Таким образом, $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{при } x > 0 \end{cases}$;

в) $M(x) = \frac{1}{\lambda}$; $P\left(X < \frac{1}{\lambda}\right) = f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 1 - e^{-1} \approx 0{,}632.$

Задача 7.7. Испытываются два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы приборов имеет показательное распределение с параметрами 0,04 и 0,08. Найти вероятность того, что за 6 часов: а) оба элемента откажут; б) хотя бы один элемент откажет; в) откажет только один элемент.

Решение.

Введём обозначения:

событие A – откажет первый элемент;

B – откажет второй элемент.

$P(A) = P(T_1 < 6) = F_1(6) = 1 - e^{-0{,}04\cdot 6} = 0{,}213$;

$P(B) = P(T_2 < 6) = F_2(6) = 1 - e^{-0{,}08\cdot 6} = 0{,}361$.

а) $P(AB) = P(A)\cdot P(B) = 0{,}213\cdot 0{,}361 = 0{,}081$;

б) $P(A\bar{B} + \bar{A}B + AB) = 1 - P(\bar{A}\cdot\bar{B}) = 1 - P(\bar{A})\cdot P(\bar{B}) = 1 - 0{,}787\cdot 0{,}619 = 0{,}513$;

в) $P(A\bar{B} + \bar{A}B) = 0{,}213\cdot 0{,}619 + 0{,}787\cdot 0{,}381 = 0{,}432$.

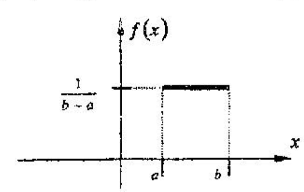
Задача 7.8. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение с параметром 0,01. Найти вероятность того, что за время x 50 часов: а) элемент откажет; б) элемент не откажет.

4. Равномерный закон распределения

Непрерывная случайная величина X называется *равномерно распределённой в интервале (a; b)*, если её плотность распределения в этом интервале постоянна:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a \\ \frac{1}{b-a}, & \text{при } a < x < b. \\ 0, & \text{при } x > b \end{cases}$$

График функции плотности $f(x)$ имеет вид:

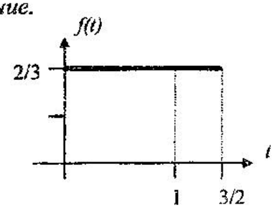


Математическое ожидание $M(x) = \frac{a+b}{2}$.

Дисперсия $D(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Задача 7.9. На перекрёстке стоит автоматический светофор, в котором 1 минуту горит зелёный свет и 0,5 минуты – красный, затем опять 1 минуту горит зелёный свет, 0,5 минуты – красный и т.д. Некто подъезжает к перекрёстку на машине в случайный момент времени, не связанный с работой светофора. Найти вероятность того, что он проедет перекрёсток, не останавливаясь.

Решение.



Момент проезда автомашины через перекрёсток распределён равномерно в интервале, равном периоду смены цветов в светофоре. Этот период равен 1 + 0,5 =1,5 (мин).

$$f(t)=\frac{b-a}{2}=\frac{\frac{3}{2}-0}{2}=\frac{2}{3}.$$

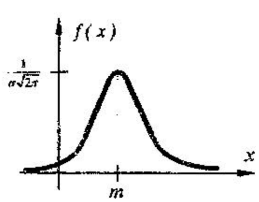
Для того чтобы машина проехала через перекрёсток, не останавливаясь, достаточно, чтобы момент проезда перекрёстка пришёлся на интервал времени (0; 1). Для случайной величины, подчинённой закону постоянной плотности в интервале (0; 1,5), вероятность того, что она попадёт в интервал (0; 1), равна площади прямоугольника со сторонами 1 и $\frac{2}{3}$: $1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$.

5. Нормальный закон распределения

Непрерывная случайная величина X называется *распределённой по нормальному закону,* если её плотность распределения равна:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

График функции плотности имеет вид:



Математическое ожидание $M(x) = m$.

Дисперсия $D(x)=\sigma^2$.

Вероятность попадания случайной величины X в интервал $(\alpha;\beta)$ выражается формулой:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – табулированная функция (приложение, табл. 2), которая называется *интегралом вероятности* или *интегралом Лапласа.*

Функция $\Phi(x)$ не выражается через элементарные функции. Методами математического анализа изучены ее свойства и составлены подробные таблицы значений. Отметим два важных **свойства функции $\Phi(x)$.**

1. Функция $\Phi(x)$ нечетная, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

2. Функция $\Phi(x)$ возрастает от 0 до 0,5 , когда x изменяется от 0 до $+\infty$. Отсюда и из нечетности $\Phi(x)$ следует, что на отрицательной части оси абсцисс она возрастает от –0,5 до 0.

Заметим, что функция $\Phi(x)$ возрастает быстро и уже при $x = 4$ ее значение равно 0,499968, то есть очень близко к 0,5.

В соответствии с формулой (6) вероятность попадания случайной величины в $[\alpha;\beta]$

$$p(\alpha<x<\beta)=\int_\alpha^\beta f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_\alpha^\beta e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Этот интеграл с помощью замены переменной можно выразить через интеграл Лапласа:

$$p(\alpha<x<\beta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).\quad(18)$$

Вероятность того, что отклонение случайной величины X, распределенной по нормальному закону, от ее математического ожидания а меньше $\delta>0$ (по абсолютной величине), равна $2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$:

$$p(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Это следует из формулы (18):

$$p(|X-a|<\delta)=\Phi\left(\frac{(a+\delta)-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{(a-\delta)-a}{\sigma}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).\quad(19)$$

Вычислим вероятность $p(|X-a|<\delta)$ при $\delta=\sigma$, $\delta=2\sigma$ и $\delta=3\sigma$:

$$p(|X-a|<\sigma)=2\Phi(1)=0{,}6827;$$
$$p(|X-a|<2\sigma)=2\Phi(2)=0{,}9545;$$
$$p(|X-a|<3\sigma)=2\Phi(3)=0{,}9973.$$

Из последнего равенства видно, что событие $a-3\delta<X<a+3\delta$ является практически достоверным. Этот факт носит название *«правила трех сигма»: если случайная величина распределена по нормальному закону, то ее отклонение от ма-*

тематического ожидания (по абсолютной величине) практически не превышает 3σ.

Задача 7.10. Случайная величина X распределена нормально. Среднее квадратичное отклонение этой величины $\sigma = 2$, а математическое ожидание $a = 6$. Найдем:

а) вероятность того, что X примет значение, заключенное в интервале (4; 7);

б) вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше 0,3;

в) X примет значение большее 15.

Решение.

а) Воспользуемся формулой (18). $\alpha = 4$, $\beta = 7$,

$$p(4<X<7) = \Phi\left(\frac{7-6}{2}\right) - \Phi\left(\frac{4-6}{2}\right) = \Phi(0{,}5) - \Phi(-1) =$$
$$= \Phi(0{,}5) + \Phi(1) = 0{,}1915 + 0{,}3413 = 0{,}5328.$$

б) Воспользуемся формулой (19): $\delta = 0{,}3$,

$$p(|X-6|< 0{,}3) = 2\Phi\left(\frac{0{,}3}{2}\right) = 2\Phi(0{,}15) = 2\cdot 0{,}0596 = 0{,}1192.$$

в) Так как разность между значениями X и математическим ожиданием a больше 9, а $9 > 3\sigma = 6$, то в соответствии с правилом трех сигма: $p(X > 15) = 0$.

Задача 7.11. Математическое ожидание нормально распределённой случайной величины X равно 3, дисперсия – 4. Найти $P(-1 \le X < 5)$.

Решение.

По условию: $m=3$, $\sigma^2 = 4$, $\sigma = 2$, $\alpha = -1$, $\beta = 5$.

$$P(-1 \le X < 5) = \Phi\left(\frac{5-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-1-3}{2}\right) = \Phi(1) + \Phi(2).$$

Здесь использовали свойство: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

$$P(-1 \le X < 5) = 0{,}34 + 0{,}48 = 0{,}82.$$

Задача 7.12. Браковка шариков для подшипников производится следующим образом: если шарик не проходит через отверстие диаметром d_1, но проходит через отверстие диаметром $d_2 > d_1$, то его размер считается приемлемым. Если это условие не выполняется, то шарик бракуется. Известно, что диаметр шарика есть нормально распределённая случайная величина с числовыми характеристиками:

$$m = \frac{d_1 + d_2}{2};\ \sigma = \frac{d_2 - d_1}{4}.$$

Определить вероятность p того, что шарик будет забракован.

Решение.

Случайная величина X – диаметр шарика. По условию она распределена по нормальному закону.

$$p = 1 - P(d_1 < X < d_2) = 1 - \left[\Phi\left(\frac{d_2 - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{d_1 - m}{\sigma}\right)\right];$$

$$\frac{d_2 - m}{\sigma} = \frac{d_2 - \frac{d_1 + d_2}{2}}{\sigma} = \frac{d_2 - d_1}{2\sigma};$$

$$\frac{d_1 - m}{\sigma} = \frac{d_1 - \frac{d_1 + d_2}{2}}{\sigma} = \frac{d_1 - d_2}{2\sigma} = -\frac{d_2 - d_1}{2\sigma};$$

$$p = 1 - \left[\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{d_2 - d_1}{2\sigma}\right)\right] =$$
$$= 1 - \left[\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma}\right)\right] = 1 - 2\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma}\right);$$
$$\frac{d_2 - d_1}{2\sigma} = \frac{d_2 - d_1}{2\cdot\frac{d_2 - d_1}{4}} = 2;$$
$$p = 1 - 2\Phi(2) = 1 - 2\cdot 0{,}48 = 0{,}04.$$

Задача 7.13. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением $\sigma = 1$ и математическим ожиданием $a=0$. Найти вероятность того, что из двух независимых наблюдений ошибка хотя бы одного из них не превзойдет по абсолютной величине 1,28.

Решение.

Подсчитаем вероятность того, что ошибка при одном наблюдении не превзойдет по абсолютной величине 1,28. Воспользуемся формулой (19):

$$p(|X| < 1{,}28) = 2\Phi(1{,}28) = 2\cdot 0{,}3997 = 0{,}7994 \approx 0{,}8.$$

Значит, вероятность ошибки при одном наблюдении равна 0,2. Так как наблюдения независимы, то вероятность ошибки в двух наблюдениях равна $0{,}2^2 = 0{,}04$. Поэтому вероятность того, что из двух независимых наблюдений ошибка хотя бы одного из них не превзойдет по абсолютной величине 1,28 (т.е. противоположного события) равна 1–0,04=0,96. Ответ. 0,96.

Задача 7.14. Случайная величина X подчинена нормальному закону с математическим ожиданием $m = 0$. Вероятность попадания этой случайной величины на участок от $-a$ до a равна 0,5. Найти σ.

Задача 7.15. Детали, изготавливаемые автоматом, считаются стандартными, если отклонение размера детали от проектного не превышает 2 *мм*. Случайные отклонения X размера детали подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 1{,}6$ *мм* и математическим ожиданием $a = 0$. Сколько процентов стандартных деталей изготовляет автомат?

Задача 7.16. Случайная величина X подчинена нормальному закону с математическим ожиданием $a = 0$. Вероятность попадания X в промежуток $(-c;\ c)$ равна 0,5. Найдите σ и запишите выражение плотности нормального закона.

Задача 7.17. Производится стрельба по цели, имеющей форму полосы. Ширина полосы 20 *м*. Прицеливание производится по средней линии полосы. Считая, что отклонение X места попадания снаряда от середины полосы – случайная величина, закон распределения которой близок к нормальному со средним квадратическим отклонением $\sigma = 16$*м*, найдите:

а) вероятность попадания в полосу при одном выстреле (событие A);

б) вероятность попадания в полосу, по крайней мере одного снаряда при трех (независимых) выстрелах (событие B);

в) вероятность не менее двух попаданий при трех выстрелах (событие C).

Задача 7.18. Полагая, что рост мужчин определенной возрастной группы есть нормально распределенная случайная величина X, с параметрами $a = 173$ и $\sigma = 6$, найдите:
а) процент выпуска костюмов 4-го роста (176-182 *см*) в общем объеме производства для данной возрастной группы;
б) то же для костюмов 3-го роста (170-176 *см*).

Задача 7.19. Цена на акции некоторой компании – случайная величина, распределенная по закону, близкому к нормальному с математическим ожиданием $a = 48$ *у.е.* и средним квадратичным отклонением $\sigma = 6$. Определите вероятность того, что в определенный момент цена за акцию была: а) более 60 *у.е.*; б) ниже 60 *у.е.*; в) выше 40 *у.е.*; г) между 40 и 50 *у.е.*

Задания к контрольной работе

Контрольные задания выполняются по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой учебного номера (шифра) студента.

Вар-т	Номера задач						
1	1	11	21	31	41	51	61
2	2	12	22	32	42	52	62
3	3	13	23	33	43	53	63
4	4	14	24	34	44	54	64
5	5	15	25	35	45	55	65
6	6	16	26	36	46	56	66
7	7	17	27	37	47	57	67
8	8	18	28	38	48	58	68
9	9	19	29	39	49	59	69
10	10	20	30	50	50	60	70

1. Три стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,75; для второго – 0,8; для третьего – 0,9. Найти вероятность того, что: 1) все три стрелка попадут в цель; 2) все трое промахнутся; 3) только один стрелок попадёт в цель; 4) хотя бы один стрелок попадёт в цель.

2. В первом ящике 6 белых и 4 чёрных шара, во втором – 7 белых и 3 чёрных шара. Из каждого ящика наугад вынимают по одному шару. Чему равна вероятность того, что вынутые шары разного цвета?

3. Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность поражения мишени для первого стрелка равна 0,65, для второго – 0,7. Найти вероятность того, что: а) оба стрелка поразят мишень, б) оба стрелка промахнутся, в) хотя бы один из стрелков поразит мишень.

4. Имеются три транзистора с разных заводов. Вероятность выхода из строя в течение года транзистора с первого завода равна 0,1, со второго – 0,4, с третьего – 0,2. Найти вероятность того, что в течение года выйдут из строя только два транзистора.

5. Из партии, в которой 20 деталей без дефектов и 5 с дефектами, берут наудачу 3 детали. Чему равна вероятность того, что: 1) все три детали без дефектов; 2) по крайней мере одна деталь без дефектов?

6. Электрическая цепь состоит из трёх элементов с вероятностями безотказной работы соответственно 0,5; 0,9; 0,7. Для работы цепи достаточно работы двух элементов. Какова вероятность, что цепь работает?

7. Ящик содержит 10 деталей, среди которых 3 стандартных. Найти вероятность того, что из наудачу отобранных 5 деталей окажется не более одной стандартной.

8. Брошены два одинаковых игральных кубика. Найти вероятность того, что цифра 6 появится хотя бы на одной грани.

9. Для поражения цели достаточно попадания хотя бы одного снаряда. Произведено два залпа из двух орудий (4 выстрела). Найти вероятность поражения цели, если вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,3, а из второго – 0,4.

10.В урне лежат 12 белых и 8 красных шаров. Вынули 8 шаров. Какова вероятность того, что: 1) три из них красные, 2) красных шаров вынуто не более трёх?

11.В магазин поступают однотипные консервы от четырёх поставщиков. Вероятность брака для каждого из поставщиков соответственно равна 0,04; 0,03; 0,06; 0,02. От первого поставщика получено 300 банок, от второго – 200, от третьего – 500, от четвёртого – 250. Какова вероятность, что купленная банка окажется бракованной?

12.На склад готовой продукции поступает 75% из первого цеха и 25% из второго цеха. Продукция первого цеха имеет 0,2% брака, продукция второго цеха – 0,3% брака. Найти вероятность того, что наугад взятое со склада изделие окажется бракованным.

13.На двух станках производятся одинаковые детали. Вероятность того, что деталь, произведённая на первом станке, будет стандартной, равна 0,8, а на втором – 0,9. Производительность второго станка втрое больше производительности первого. Детали с обоих станков поступают на транспортёр. Найти вероятность того, что взятая наудачу с транспортёра деталь будет стандартной.

14.На сборку поступают однотипные изделия из четырёх цехов. Вероятности брака в каждом из цехов соответственно равны 0,04; 0,03; 0,06; 0,02. Первый цех поставляет 30 изделий, второй – 20 изделий, третий – 50 изделий, четвёртый – 25 изделий. Найти вероятность того, что взятое наудачу изделие окажется бракованным.

15.Сборщик получил 3 ящика деталей. В первом ящике 40 деталей, из них 20 окрашенных, во втором – 50 деталей, из них 10 окрашенных, в третьем – 30 деталей, из них 15 окрашенных. Найти вероятность того, что деталь, извлечённая из наудачу взятого ящика, окажется окрашенной.

16.Прибор может работать в двух режимах: нормальном и аварийном. Нормальный режим наблюдается в 95% всех случаев работы прибора, аварийный – в 5% всех случаев. Вероятность выхода из строя прибора за время t в нормальном режиме – 0,1, в аварийном – 0,7. Найти полную вероятность выхода из строя прибора за время t.

17.Электролампы изготавливаются на двух заводах. Первый завод производит 60% общего количества ламп, второй – 40%. Продукция первого завода содержит 70% стандартных ламп, второго – 80%. В магазин поступает продукция обоих заводов. Найти вероятность того, что купленная в магазине лампа окажется стандартной.

18.На сборку поступают детали с двух автоматов. Первый автомат даёт 70% необходимых для сборки деталей, второй – 30%. Вероятность появления бракованной детали с первого автомата равна 0,02; со второго – 0,01. Какова вероятность поступления на сборку бракованной детали?

19.На склад поступили одинаковые электрические утюги. Первый завод поставляет 80%, а второй – 20% всего количества. Известно, что первый завод выпускает 90% продукции, способной прослужить положенный срок, а второй – 95%. Какова вероятность того, что наугад взятый утюг прослужит положенный срок?

20.Имеются две партии изделий по 10 и 15 штук. В каждой партии одно изделие бракованное. Изделие, взятое наудачу из первой партии, переложено во вторую. После этого выбирается наудачу изделие из второй партии. Определить вероятность извлечения бракованного изделия из второй партии.

21.Вероятность появления события A при одном испытании равна 0,1. Найти вероятность того, что при трёх независимых испытаниях оно появится: 1) не менее двух раз, 2) хотя бы один раз.

22.Игральную кость подбрасывают три раза. Найти вероятность того, что дважды появится число очков, кратное трём.

23.При каждом выстреле из орудия вероятность поражения цели равна 0,8. Найти вероятность того, что при пяти выстрелах будет сделано не менее четырёх попаданий.

24.Вероятность поражения стрелком мишени при одном выстреле равна 0,85. Найти вероятность того, что при четырёх последовательных выстрелах будет не более двух промахов.

25.Вероятность хотя бы одного попадания при двух выстрелах равна 0,99. Найти вероятность трёх попаданий при четырёх выстрелах.

26.В квартире четыре электрические лампочки. Для каждой лампочки вероятность оказаться неисправной в течение года равна $\frac{5}{6}$. Какова вероятность того, что в течение года придётся заменить не менее половины лампочек?

27.Игральную кость бросают 8 раз. Найти вероятность того, что цифра 6 появится: а) ровно 3 раза, б) более двух раз.

28.Вероятность того, что телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока из трёх телевизоров: 1) не более одного потребуют ремонта, 2) хотя бы один не потребует ремонта.

29.Вероятность всхожести семян ржи составляет 90%. Чему равна вероятность того, что из 7 семян взойдут не менее 5?

30.Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие нестандартно равна 0,1. Найти вероятность того, что: 1) из трёх проверенных изделий только одно нестандартное; 2) нестандартным будет только третье, по порядку проверенное изделие.

31.Игральную кость подбрасывают 500 раз. Какова вероятность того, что цифра 1 при этом выпадет 50 раз?

32.Вероятность попадания в мишень при каждом из 400 выстрелов равна 0,75. Какова вероятность того, что в мишени будет от 280 до 330 пробоин?

33.Чему равна вероятность того, что среди 100 случайных прохожих окажутся 32 женщины (предполагается, что число женщин и мужчин в городе одинаково)?

34.Вероятность наступления события A в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие A появится в этих испытаниях: 1) ровно 90 раз; 2) не менее 80 и более 90 раз?

35.Вероятность выздоровления больного в результате применения нового способа лечения равна 0,8. Сколько вылечившихся из 100 больных можно ожидать с вероятностью 0,75?

36.Игральную кость подбрасывают 320 раз. Какова вероятность того, что цифра 5 при этом выпадет не менее 70 и не более 83 раз?

37. Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,02. Какова вероятность того, что из двухсот пассажиров, купивших билет на этот поезд, опоздают к отправлению не более пяти?

38. При проведении эксперимента монету подбрасывали 4096 раз, причём герб выпадал 2068 раз. С какой вероятностью можно было ожидать этот результат?

39. Найти вероятность того, что в партии из 900 изделий число изделий высшего сорта заключено между 600 и 700. Вероятность появления изделия высшего сорта в партии равна 0,8.

40. Игральный кубик подбросили 125 раз. Какова вероятность того, что цифра 6 появилась не более 60 раз?

41 – 50. В урне n красных и m белых шаров. Наугад выбирают k шаров. Рассматривается дискретная случайная величина X – число извлечённых красных шаров среди k шаров. Найти:

а) закон распределения случайной величины X;

б) функцию распределения и её график;

в) математическое ожидание;

г) дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Значения параметров n, m, k для задач каждого из вариантов приведены в следующей таблице:

№	41	42	43	44	45
n	5	6	10	8	10
m	10	3	10	9	8
k	3	4	3	4	4
№	46	47	48	49	50
n	7	5	9	7	8
m	8	4	10	6	5
k	3	3	4	3	4

51 – 60. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти: 1) плотность распределения вероятностей $f(x)$; 2) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение; 3) построить графики функций $F(x)$, $f(x)$; 4) вероятность попадания в интервале (a, b).

51. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0\\ \dfrac{x^2}{16}, & \text{при } 0<x\le 4;\\ 1, & \text{при } x>4\end{cases}$$
$a=1$; $b=2$.

52. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0\\ 0{,}2x, & \text{при } 0<x\le 5;\\ 1, & \text{при } x>5\end{cases}$$
$a=1$; $b=3$.

53. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le -1\\ \dfrac{x+1}{3}, & \text{при } -1<x\le 2;\\ 1, & \text{при } x>2\end{cases}$$
$a=0$; $b=2$.

54. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0\\ \dfrac{x^2}{36}, & \text{при } 0<x\le 6;\\ 1, & \text{при } x>6\end{cases}$$
$a=1$; $b=2$.

55. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0\\ 0{,}25x+0{,}5, & \text{при } 0<x\le 2;\\ 1, & \text{при } x>2\end{cases}$$
$a=1$; $b=2$.

56. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 2\\ \dfrac{x}{2}-1, & \text{при } 2<x\le 4;\\ 1, & \text{при } x>4\end{cases}$$
$a=3$; $b=4$.

57. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 1\\ \dfrac{(x-1)}{2}, & \text{при } 1<x\le 3;\\ 1, & \text{при } x>3\end{cases}$$
$a=2$; $b=3$.

58. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0\\ 3x^2+2x, & \text{при } 0<x\le \frac{1}{3};\\ 1, & \text{при } x>\frac{1}{3}\end{cases}$$
$a=\dfrac{1}{6}$; $b=\dfrac{1}{4}$.

59. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 2\\ \dfrac{x}{2}-1, & \text{при } 2<x\le 4;\\ 1, & \text{при } x>4\end{cases}$$
$a=3$; $b=4$.

60. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0\\ x^3, & \text{при } 0<x\le 1;\\ 1, & \text{при } x>1\end{cases}$$
$a=\dfrac{1}{2}$; $b=1$.

61 – 70. Известно математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины X. Найти вероятность попадания значений этой величины в заданный интервал $(\alpha;\beta)$.

№	a	σ	α	β
61	10	4	2	13
62	9	5	5	14
63	8	1	4	9
64	7	2	3	10
65	6	3	2	11
№	a	σ	α	β
66	5	1	1	12
67	4	5	2	11
68	3	2	3	10
69	2	5	4	9
70	2	4	6	10

Приложения

Таблица 1. Значения функции $\varphi(x)=\left(1/\sqrt{2\pi}\right)e^{-x^2/2}$. В таблице указаны промежутки $[x_i;x_{i+1})$, в которых значение $\varphi(x)$ с точностью до второго знака после запятой постоянно.

$[x_i;x_{i+1})$	$\varphi(x)$	$[x_i;x_{i+1})$	$\varphi(x)$
0 – 0.15	0.40	0.74 – 0.78	0.30
0.15 – 0.27	0.39	0.78 – 0.83	0.29
0.27 – 0.36	0.38	0.83 – 0.87	0.28
0.36 – 0.43	0.37	0.87 – 0.91	0.27
0.43 – 0.49	0.36	0.91 – 0.95	0.26
0.49 – 0.54	0.35	0.95 – 0.99	0.25
0.54 – 0.60	0.34	0.99 – 1.03	0.24
0.60 – 0.65	0.33	1.03 – 1.08	0.23
0.65 – 0.69	0.32	1.08 – 1.12	0.22
0.69 – 0.74	0.31	1.12 – 1.16	0.21
$[x_i;x_{i+1})$	$\varphi(x)$	$[x_i;x_{i+1})$	$\varphi(x)$
1.16 – 1.20	0.20	1.64 – 1.70	0.10
1.20 – 1.24	0.19	1.70 – 1.76	0.09
1.24 – 1.29	0.18	1.76 – 1.83	0.08
1.29 – 1.33	0.17	1.83 – 1.90	0.07
1.33 – 1.38	0.16	1.90 – 2.00	0.06
1.38 – 1.43	0.15	2.00 – 2.09	0.05
1.43 – 1.48	0.14	2.09 – 2.21	0.04
1.48 – 1.53	0.13	2.21 – 2.36	0.03
1.53 – 1.58	0.12	2.36 – 2.57	0.02
1.58 – 1.64	0.11	2.57 – 3.99	0.01

При $x \geq 4$ считать $\varphi(x)=0$. Кроме того, $\varphi(-x)=-\varphi(x)$.

Таблица 2. Значения функции $\Phi_0(x)=\left(1/\sqrt{2\pi}\right)\int_0^x e^{-t^2/2}dt$..

$[x_i;x_{i+1})$	$\Phi_0(x)$	$[x_i;x_{i+1})$	$\Phi_0(x)$
0 – 0.02	0	0.32 – 0.35	0.13
0.02 – 0.04	0.01	0.35 – 0.38	0.14
0.04 – 0.07	0.02	0.38 – 0.40	0.15
0.07 – 0.09	0.03	0.40 – 0.43	0.16
0.09 – 0.12	0.04	0.43 – 0.46	0.17
0.12 – 0.14	0.05	0.46 – 0.49	0.18
0.14 – 0.17	0.06	0.49 – 0.51	0.19
0.17 – 0.19	0.07	0.51 – 0.54	0.20
0.19 – 0.22	0.08	0.54 – 0.57	0.21
0.22 – 0.25	0.09	0.57 – 0.60	0.22
0.25 – 0.27	0.10	0.60 – 0.63	0.23
0.27 – 0.30	0.11	0.63 – 0.66	0.24
0.30 – 0.32	0.12	0.66 – 0.70	0.25
$[x_i;x_{i+1})$	$\Phi_0(x)$	$[x_i;x_{i+1})$	$\Phi_0(x)$
0.70 – 0.73	0.26	1.16 – 1.21	0.38
0.73 – 0.76	0.27	1.21 – 1.26	0.39
0.76 – 0.79	0.28	1.26 – 1.32	0.40
0.79 – 0.83	0.29	1.32 – 1.38	0.41
0.83 – 0.86	0.30	1.38 – 1.44	0.42
0.86 – 0.90	0.31	1.44 – 1.52	0.43
0.90 – 0.94	0.32	1.52 – 1.60	0.44
0.94 – 0.98	0.33	1.60 – 1.70	0.45
0.98 – 1.02	0.34	1.70 – 1.82	0.46
1.02 – 1.06	0.35	1.82 – 1.96	0.47
1.06 – 1.11	0.36	1.96 – 2.18	0.48
1.11 – 1.16	0.37	2.18 – 4.99	0.49

При $x \geq 4$ считать $\Phi_0(x)=0.5$. Кроме того, $\Phi_0(-x)=-\Phi_0(x)$.

Ответы к задачам

Задача 1.1. а) да; б) нет; в) да; г) да.
Задача 1.2. а) да; б) нет; в) да; г) нет.
Задача 1.3. а) да; б) нет; в) в общем случае нет; г) нет; д) да.

Задача 2.6. $3/8$.

Задача 2.7. $\frac{55}{182} \approx 0{,}3$.

Задача 2.8. $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{3}$; $P(C) = \frac{5}{6}$.

Задача 2.9. $P(A) = P(B)$.

Задача 3.1. 1) $A + C = E$, 2) $AC = K$, 3) $EF = G$, 4) $G + E = E$, 5) $GE = G$, 6) $BD = H$, 7) $E + K = E$.

Задача 3.2. 1) $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$; 2) $B = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3$; 3) $C = A_1 + A_2 + A_3$ или $C = A_1 + \overline{A}_1 A_2 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3$ или $C = A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3$;
4) $B = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3$; 5) $E = \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + A_1 A_2$; 6) $F = \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \overline{A}_2$;
7) $G = \overline{A}_1 \overline{A}_2$.

Задача 3.3. 1) $A + B = B$; 2) $AB = A$; 3) $B + C = B$; 4) $BC = B$; 5) $D + E + F = C$; 6) $BF = F$.

Задача 3.4. $\overline{A}$ – выпадение хотя бы одной цифры; $\overline{B}$ – появление чёрного или красного шара; $\overline{C}$ – хотя бы один промах; $\overline{D}$ – все пять промахов; $\overline{E}$ – более двух попаданий.

Задача 3.5. 1) $P(E) = \frac{3}{4}$; $P_A(E) = \frac{1}{2}$; события зависимы, т.к. $P(E) \neq P_A(E)$;

2) $P(A) = \frac{1}{2}$; $P_F(A) = \frac{1}{2}$; события независимы, т.к. $P(A) = P_F(A)$;

3) $P(D) = \frac{3}{4}$; $P_E(D) = \frac{2}{3}$; события зависимы, т.к. $P(D) \neq P_E(D)$;

4) $P(D) = \frac{3}{4}$; $P_F(D) = 1$; события зависимы, т.к. $P(D) \neq P_F(D)$.

Задача 3.15. 1) Независимы. Вычислить $P(A)$ и $P_B(A)$. 2) Зависимы. Вычислить $P(A)$ и $P_C(A)$. 3) Зависимы. Вычислить $P(B)$ и $P_C(B)$. 4) Независимы. Вычислить $P(B)$ и $P_D(B)$.

Задача 3.16. 0,88

Задача 3.17. $\frac{4}{9}$.

Задача 3.18. 0,973.

Задача 3.19 $P = p^3$.

Задача 3.20. $1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)$.

Задача 3.21. 1) $(1 - p)p$; 2) $1 - (1 - p)^2 = (2 - p)p$.

Задача 3.22. $P(A) = pp_1 + (1 - p)\alpha$; $P(B) = (1 - p)\alpha$; $P(C) = p(1 - p_1)$.

Задача 3.23. Надёжность системы, дублированной по способу а) будет $P_а = [1 - (1 - p)^2]^3 = p^3[(2 - p^3) + 6(1 - p)^2]$; по способу б) будет $P_б = 1 - (1 - p^3)^2 = p^2(2 - p^3)$. Таким образом, $P_а > P_б$.

Задача 4.8. $\frac{63}{104}$.

Задача 4.9. $p = \frac{2}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_2$.

Задача 4.10. $p = 0{,}22$.

Задача 4.11. $\approx 0{,}33$.

Задача 4.12. $\frac{p \cdot p_1}{p \cdot p_1 + (1 - p)p_2}$.

Задача 5.5. $P_4(3) + P_4(4) = 0{,}1792$.

Задача 5.6. $P_{300}(60) = 0{,}15$.

Задача 5.7. $P_{100}(70{,}80) = 0{,}7514$.

Задача 5.8. $P_{100}(2) \approx 0{,}184$.

Задача 6.1. 1) нет; 2) да; 3) нет; 4) нет.

Задача 6.2. 1) размерность случайной величины, 2) размерность квадрата случайной величины, 3) размерность случайной величины.

Задача 6.15. 1)

x_i	1	2	3
p_i	0,2	0,6	0,2

2) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1 \\ 0{,}2 & \text{при } 1 < x \le 2 \\ 0{,}8 & \text{при } 2 < x \le 3 \\ 1 & \text{при } x > 3 \end{cases}$ 3) $M(x) = 2$; $D(x) = 0{,}4$; $\sigma(x) \approx 0{,}63$

Задача 6.16. 1) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1 \\ x - 0{,}5 & \text{при } 1 < x < 2; \\ 1 & \text{при } x > 2 \end{cases}$ 2) $P\left(\frac{4}{3} \le x < \frac{5}{3}\right) = \frac{1}{3}$;

3) $M(x) = \frac{19}{12}$; $D(x) = \frac{11}{144}$.

Задача 6.17. 1) $a = \frac{3}{2}$; 2) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -1 \\ \frac{1}{2}(x^3 + 1) & \text{при } -1 < x < 1; \\ 1 & \text{при } x > 1 \end{cases}$ 3) $M(x) = 0$, $D(x) = $ [illegible]

Задача 6.18. $M(x) = \frac{a + b}{2}$; $D(x) = \frac{(a - b)^2}{12}$.

Задача 7.2.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	$1/2^6$	$6/2^6$	$15/2^6$	$20/2^6$	$15/2^6$	$6/2^6$	$1/2^6$

$M(x) = 3$; $D(x) = 1{,}5$; $\sigma(x) = 1{,}224$.

Задача 7.5. 0,09.

Задача 7.8. а) 0,39; б) 0,61.

Задача 7.14. $\sigma = 1{,}48a$.

Задача 7.15. Примерно 79 %.

Задача 7.16. $\sigma = 1{,}48a$, $f(x) = \frac{1}{1{,}48a} e^{-\frac{x^2}{4{,}4a^2}}$.

Задача 7.17. $p(A) = 0{,}468$, $p(B) = 0{,}849$, $p(C) = 0{,}452$.

Задача 7.18. а) 24 %; б) 38 %.

Задача 7.19. а) 0,977; б) 0,023; в) 0,909; г) 0,539.

Литература

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1969.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 1979.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Высшая школа, 1979.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. - М.: Наука, 1985, т. 2.

Содержание

Составители: **Н.А. Беликова, А.Н. Беликов,**
В.В. Горелова, О.В. Юсупова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методические указания

Редактор *Г.Ф. Коношина*
Технический редактор *Л.И. Пенолодина*
Корректор *Е.М. Фоменкова*

Подписано в печать 17.12.04. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Печать оперативная. Усл.печ.л. 1,09. Усл.изд.л. 1,25. Тираж 100 экз. Заказ № 981.

Самарский государственный архитектурно-строительный университет.
443001 Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

Отпечатано с оригинала заказчика в типографии ООО «СЦП-М».
443010 Самара, ул. Галактионовская, 79.